$\dfrac{\varphi(a)}{a} = \dfrac{\varphi(b)}{b}$ の解について

梶田 光

2020 年 4 月 16 日

定義 1. $\dfrac{\varphi(a)}{a} = \dfrac{\varphi(b)}{b}$ のとき, a と b は φ 同値であるという.

これは飯高先生が定義された副完全数の概念に似ている.

命題 1. $\mathrm{rad}(a) = \mathrm{rad}(b)$ ならば a と b は φ 同値である.

ここで $\mathrm{rad}(a)$ は a の根基, つまり a の相異なる素因数の積のことを指す.
言い換えると量 $\dfrac{\varphi(a)}{a}$ は素因子のべきに依らない.
Proof. $a = 1$ のとき $\mathrm{rad}(b) = 1$ であるがこれを満たす b は 1 のみであり,
$a = b$ より a と b は φ 同値である.
次に $a \neq 1$ の場合を考える.
a は少なくとも一つの素因数を持っているので $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_n^{e_n} (\forall i\ p_i \in \mathrm{prime}, e_i > 0, \forall j\ p_i \neq p_j)$ と書ける.
このとき

$$\frac{\varphi(a)}{a} = \frac{a\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)}{a} = \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

これは a の素因数のみに依り, 素因数の指数について不変である.
したがって a と b は φ 同値である. □

命題 1 より "φ 同値" を考えるとき自然数の素因数の指数は関係がない.

事実 1. $n = \mathrm{rad}(n)$ のとき $n > 1$ で $n = pk (p \in \mathrm{prime})$ と書けるとすると $p \nmid k$ が成り立つ.

$n = \mathrm{rad}(n)$ ならば n は異なる素因数の積で書けるから上の事実が従う.

定理 1. $a = \mathrm{rad}(a)$, $b = \mathrm{rad}(b)$ とするとき a と b が φ 同値ならば $a = b$ である.

これは命題 1 の逆である.

Proof. まず $a = 1$ とすると $\dfrac{\varphi(b)}{b} = 1$ となって $b = 1$ であるから定理は成り立つ.
次に $a > 1$ とおくと $\dfrac{\varphi(b)}{b} < 1$ である.
また a は少なくとも一つの素因数をもつ.
(1) $\gcd(a, \varphi(a)) = 1$ の場合
　　ユークリッドの補題より $b = ak, \varphi(b) = k\varphi(a)$ と書ける.

ここで $b=\mathrm{rad}(b)$ より $\gcd(a,k)=1$ となって $\varphi(b)=\varphi(a)\varphi(k)$ である．

比較すると $k\varphi(a)=\varphi(a)\varphi(k)$, つまり $k=\varphi(k)$ であるから $a=b$ となって定理は成り立つ．

(2) $\gcd(a,\varphi(a))\neq 1$ の場合

$\gcd(a,\varphi(a))=P_1>1$ とおくと a は P_1 の倍数であるから

$a=P_1n_1$ と書ける．

$n_1=1$ とすると $\dfrac{\varphi(a)}{a}$ が自然数となって $a>1$ に矛盾．

これを $\dfrac{\varphi(a)}{a}=\dfrac{\varphi(b)}{b}$ に代入すると

$$\frac{\varphi(a)}{a}=\frac{\varphi(P_1)\varphi(n_1)}{P_1n_1}=\frac{\varphi(P_1)\dfrac{\varphi(n_1)}{P_1}}{n_1}=\frac{\varphi(b)}{b}$$

ここで $\gcd(a,\varphi(a))=P_1$ より $\varphi(P_1)\dfrac{\varphi(n_1)}{P_1}$ と n_1 は自然数であり, かつ互いに素である．

したがってユークリッドの補題から $b=k_1n_1, \varphi(b)=k_1\varphi(P_1)\dfrac{\varphi(n_1)}{P_1}$ と書ける．

$b=\mathrm{rad}(b)$ より k_1 と n_1 は互いに素であるから $\varphi(b)=\varphi(k_1)\varphi(n_1)$ である．

比較すると $\varphi(k_1)\varphi(n_1)=k_1\varphi(P_1)\dfrac{\varphi(n_1)}{P_1}$

$\varphi(k_1)=k_1\dfrac{\varphi(P_1)}{P_1}$

$\dfrac{\varphi(k_1)}{k_1}=\dfrac{\varphi(P_1)}{P_1}$

$\gcd(P_1,\varphi(P_1))=1$ のとき上記の理由から $k_1=P_1$ となる．

これを $b=k_1n_1$ に代入すると $b=P_1n_1=a$ となって定理は成り立つ．

次に $\gcd(P_1,\varphi(P_1))\neq 1$ の場合について考える．

$\gcd(P_1,\varphi(P_1))=P_2$ とおくと P_1 は P_2 の倍数であるから

$P_1=P_2n_2$ と書ける．

$\vdots$

ここで a は P_1 の倍数で, また $n_1>1$ より a は P_1 の素因数をすべて含み,

また P_1 の素因数の個数は a よりも少ない．

また P_1 と P_2 に対しても同じ条件が成り立っているから同様のことがいえる．

これを繰り返すと, $\gcd(P_s,\varphi(P_s))=1$ となる s が存在するので s をそのようにおく．

すると $k_s=P_s$ となる．

このとき $k_{s-1}=k_sn_s=P_{s-1}$ である．

これを繰り返すと $k_1=P_1$ となる．

$b=k_1n_1$ に代入すると $b=P_1n_1=a$ となって定理は成り立つ．

以上より定理が成り立つことが証明された． □