連分数の循環性とセンターの研究

橋本博信
学習院大学理学部数学科

平成 25 年 2 月 1 日

目 次

1　目的

1.1　連分数と連分数展開

この研究では連分数を扱う。連分数（continued fraction）とは、分母にさらに分数が含まれているような分数のことを指す。分子がすべて 1 である場合、正則連分数ということがある。単に連分数といった場合、正則連分数を指す場合が多い。具体的には次のような形である。
2 無理数 α の連分数展開とは、無理数 α に対し $N_1 = [\,\alpha\,]$（実数 α の整数部分）とし、$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1}$ とする。同様にこれを繰り返し、$N_2 = [\alpha_1]$ とし、$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha - N_2}$、$N_3 = [\alpha_2]$、$\alpha_3 = \cdots$ と続く。

$$\alpha = N_0 + \cfrac{1}{N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

このように無限に続く分数で表せる。これを α の（正規）連分数展開という。

α が 2 無理数のとき数列 N_1、N_2、N_3 は必ずあることから、繰り返しがおきることが知られている。繰り返す部分を「循環節」といい、その長さを「周期」という。循環節に至るまでところを「ひげ」という。

1.2　研究目的

今回の研究では、$\alpha = \dfrac{A\sqrt{M} + B}{C}$ $(A, B, C, M \in Z)$ という形を用いる．これは，a, b を有理数とするとき $\alpha = a\sqrt{M} + b$ を整数の組 $[A, B, C](\sqrt{M})$ で表示するため、a, b の分母を共通の C にして、$a = \dfrac{A}{C}, b = \dfrac{B}{C}$ とおき、$\alpha = \dfrac{A\sqrt{M} + B}{C}$ ということである。
今回の研究目的は $\sqrt{M}$ は $M = 2$ で固定し，$[A, B, C]$ の値の変化によって、α の連分数展開における循環節、周期、ひげの長さについて研究することである。

2　方法

2.1　連分数展開の方法

　連分数展開を以下のように定義する。
α を 2 次無理数 (>0) とする。
$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$
となるように R 以下で最大の整数 $[\alpha]$ を取り出し、これを N_1 とおく。$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1}$ とする。
上記と同様にして $N_2 = [\alpha_1]$、$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - N_2}$ とする。
この操作を繰り返し行う。
$N_3 = [\alpha_2]$、$\alpha_3 = \dfrac{1}{\alpha_2 - N_3}$
$N_4 = [\alpha_3]$、$\alpha_4 = \dfrac{1}{\alpha_3 - N_4}$
$\vdots$
$N_k = [\alpha_{k-1}]$、$\alpha_k = \dfrac{1}{\alpha_{k-1} - N_k}$
$N_{k+1} = [\alpha_k]$、$\alpha_{k+1} = \dfrac{1}{\alpha_k - N_{k+1}}$
$\vdots$
このように定義すると、R は次のような連分数で表すことが出来る。

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{N_4 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{N_k + \cfrac{1}{N_{k+1} + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}$$

【循環連分数の表し方】

$$
\begin{aligned}
\alpha = H_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}} \\
= [H_1 | a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k]
\end{aligned}
$$

【純循環連分数の表し方】

$$
\begin{aligned}
\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}} \\
= [a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k]
\end{aligned}
$$

2.2 実数の具体例

例）$A=7, B=0, C=2, M=2$ とおくと、$\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$、$N_1 = [\alpha] = 4$ となる。

$$\alpha_1 = \cfrac{1}{\cfrac{7\sqrt{2}}{2} - 4} = \frac{7\sqrt{2}+8}{17} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1] = 1$$

$$\alpha_2 = \cfrac{1}{\cfrac{7\sqrt{2}+8}{17} - 1} = \frac{7\sqrt{2}+9}{1} \quad , \quad N_3 = [\alpha_2] = 18$$

$$\alpha_3 = \cfrac{1}{\cfrac{7\sqrt{2}+9}{1} - 18} = \frac{7\sqrt{2}+9}{17} \quad , \quad N_4 = [\alpha_3] = 1$$

$$\alpha_4 = \cfrac{1}{\cfrac{7\sqrt{2}+9}{17} - 1} = \frac{7\sqrt{2}+8}{2} \quad , \quad N_5 = [\alpha_4] = 8$$

$$\alpha_5 = \cfrac{1}{\cfrac{7\sqrt{2}+8}{2} - 8} = \frac{7\sqrt{2}+8}{17} = \alpha_1$$

よって、$4, 1, 18, 1, 8, 1, 18, 1, 8, \cdots$ となり、以下 1,18,1,8 が繰り返される。したがって、α を $A = 7, B = 0, C = 2, M = 2$ としたときの連分数展開は $[4|1, 18, 1, 8]$ と表される。

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}$$

2.3 Prolog のプログラム

```
\\
:- dynamic ts/1.
ts([0,0,0]):-!.

check(L,M,I,J):- contfr(L,L2,M,Q),
write(I),put(9),write(L),put(9),
write(Q),nl,
I1 is I+1, I1 =<J,
( \+ ts(L2) -> (asserta(ts(L2)),
check(L2,M,I1,J));
write(I1),put(9),write(L2),put(9),nl,I1=L2).

contfr([A,B,C],[A2,B2,C2],M,N):-
R=(A*sqrt(M)+B)/C,N is floor(R),
A1 is A*C,B1 is C*(-B+C*N),C1 is A*A*M-(B-C*N)*(B-C*N),
gcd33(D=(A1,B1,C1)),A2 is A1//D,B2 is B1//D,C2 is C1//D.

gcd33(D=(A,B,C)):-gcd3(D=(A,B,C)),!.

gcd3(D=(A,B,C)):-!,
gcdabs(X=(A,B)),!,
gcdabs(D=(X,C)),!.

gcd(A=(A,0)):- !.
gcd(D=(A,B)):-
B1 is A mod B,A1 =B,
gcd(D=(A1,B1)).

gcdabs(D=(A1,B1)):- A is abs(A1),
            B is abs(B1),
            gcd0(D=(A,B)).

gcd0(D=(A,B)):-!,
A<B -> gcd(D=(B,A));
       gcd(D=(A,B)).

delete_all:-retract(ts(X)),fail.
delete_all:-!.

go(L,M,J):- delete_all,check(L,M,0,J).
go(L,M,J).
```

```
for(A =<J,A) :- A =<J.
for(A =<J,K) :- A =<J,
A1 is A+1,for(A1 =<J,K).

for8(A =<J,A) :- A =<J.
for8(A =<J,K) :- A =<J,
A1 is A+8,for8(A1 =<J,K).


go1(Hund):- for(1=< Hund,C),
go([1,0,C],2,1000),nl,fail.
        go1(Hund).

go2(Hund,C):- for(1=< Hund,A),gcd(D=(A,C)),D==1,
go([A,0,C],2,1000),nl,fail.
        go2(Hund,C).

go3(Hund):- for8(5=< Hund,P),factor(P/C),C==P,
go([1,0,C],2,10000),nl,fail.
        go3(Hund).

factor(P/2):-Q is P//2,P=:=2*Q,!.
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),
for(1=<P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
P=:=J1*Q,I=J1,!.
factor(P/P):-!.

factorize(P,[P]):-factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.

prime_list(A<B):-for(A=<B,N),
factorize(N,List),write(N=List),nl,fail.
prime_list(A<B).

go_prime(Hund):- for(1< Hund,P),factor(P/I),I==P,
go([1,0,I],2,1000),nl,fail.
        go_prime(Hund).
```

3　結果

調べた結果を全て記載すると膨大な量になるのでいくつか選抜して記載することにした全ての結果は別紙；「表 1, 2, 3（.$excel$ ファイル）」に掲載されている.
$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}((1 \leq A \leq 20)\,;gcd(A,C)=1)$ は $C=3,5,14$ で $(1 \leq A \leq 20)$ のとき
$\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C=P:P$ は素数）は C が 1 から 19 のとき. 循環節のセンターが偶数になるもの $(29 \leq C \leq 197)$.
$\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（C は $P \equiv 5(mod 8)$ の素数 $\times 2$ は $C=5,13,29,37,53,61$ のとき.

3.1　表の見方

表 1: 例

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[7,0,2]	4
1	[7,8,17]	1
2	[7,9,1]	18
3	[7,9,17]	1
4	[7,8,2]	8
5	[7,8,17]	

まず表の見方を説明する。
2.1　連分数展開の方法　で述べたように、今回 $\alpha = \dfrac{A\sqrt{2}+B}{C}$ の形を用いて連分数展開を行っている。2.2　実数の具体例　の [A,B,C]=[7,0,2] としたときの表の見方を説明する。

$A=7, B=0, C=2$ とすると、
$\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$　,　$N_1 = [\alpha] = 4$ となる。
つまり表 1 の 1 行目の $0, [7,0,2], 4$ は、このときの $\alpha, [A,B,C], N_1$ を示す。

以下、連分数展開の定義に従って
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1} = \dfrac{7\sqrt{2}+8}{17}$, $N_2 = [\alpha_1] = 1$ となるので、
$[A, B, C] = [7, 8, 17]$
よって、表 1 の 2 行目の $1, [7, 2, 17], 1$ はこのときの $\alpha_1, [A, B, C], N_2$ を示す。

$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - N_2} = 7\sqrt{2}+9$, $N_3 = [\alpha_2] = 18$ となるので、
$[A, B, C] = [7, 9, 1]$
よって、表 1 の 3 行目の $2, [7, 9, 1], 18$ はこのときの $\alpha_2, [A, B, C], N_3$ を示す。

$\alpha_3 = \dfrac{1}{\alpha_2 - N_3} = \dfrac{7\sqrt{2}+9}{17}$, $N_4 = [\alpha_3] = 1$ となるので、
$[A, B, C] = [7, 9, 17]$
よって、表 1 の 4 行目の $3, [7, 9, 17], 1$ はこのときの $\alpha_3, [A, B, C], N_4$ を示す。

$\alpha_4 = \dfrac{1}{\alpha_3 - N_4} = \dfrac{7\sqrt{2}+8}{2}$, $N_5 = [\alpha_4] = 8$ となるので、
$[A, B, C] = [7, 8, 2]$
よって、表 1 の 5 行目の $4, [7, 8, 2], 1$ はこのときの $\alpha_4, [A, B, C], N_5$ を示す。
$\alpha_5 = \dfrac{1}{\alpha_4 - N_5} = \dfrac{7\sqrt{2}+8}{17} = \alpha_1$ となる。

表は 2 回目の循環の始まりの数を表示して終了する。したがって、$4, 1, 18, 1, 8, 1, 18, 1, 8 \cdots$ となり、以下循環する。$A = 7, B = 0, C = 2$ としたときの、連分数展開の循環節は $[4|1, 18, 1, 8]$ となり、ひげの長さ 1 となる。

3.2 $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}((1 \leq A \leq 20)\,; gcd(A,C)=1)$

表 2: $\dfrac{A\sqrt{2}}{3}$ $(1 \leq A \leq 20)$

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[1,0,3]	0	[2,0,3]	0	[4,0,3]	1
1	[3,0,2]	2	[3,0,4]	1	[12,9,23]	1
2	[3,4,1]	8	[6,8,1]	16	[6,7,2]	7
3	[3,4,2]	4	[3,4,4]	2	[12,14,23]	1
4	[3,4,1]		[6,8,1]		[4,3,3]	2
5			[12,9,23]			
0	[5,0,3]	2	[7,0,3]	3	[8,0,3]	3
1	[15,18,14]	2	[21,27,17]	3	[24,27,47]	1
2	[3,2,5]	1	[7,8,6]	2	[6,5,4]	3
3	[5,5,3]	4	[21,12,41]	1	[24,28,23]	2
4	[15,21,1]	42	[21,29,1]	58	[4,3,6]	1
5			[21,29,41]	1	[24,18,23]	2
6			[7,4,6]	2	[6,7,4]	3
7			[21,24,17]	3	[24,20,47]	1
8			[7,9,3]	6	[8,9,3]	6
9			[21,27,17]		[24,27,47]	
0	[10,0,3]	4	[11,0,3]	5	[13,0,3]	6
1	[15,18,28]	1	[33,45,17]	5	[39,54,14]	7
2	[6,4,5]	2	[33,40,34]	2	[39,44,79]	1
3	[5,5,6]	2	[33,28,41]	1	[39,35,23]	3
4	[30,42,1]	84	[33,13,49]	1	[39,34,82]	1
5	[5,7,6]	2	[11,12,6]	4	[13,16,3]	11
6	[6,6,5]	2	[33,36,49]	1	[39,51,49]	2
7	[15,10,28]	1	[33,13,41]	1	[39,47,17]	6
8	[10,12,3]	8	[33,28,34]	2	[39,55,1]	110
9	[15,18,28]		[33,40,17]	5	[39,55,17]	6
10			[11,15,3]	10	[39,47,49]	2
11			[33,45,17]		[13,17,3]	11
12					[39,48,82]	1
13					[39,34,23]	3
14					[39,35,79]	1
15					[39,44,14]	7
16					[13,18,3]	12
17					[39,54,14]	

.

表 2: $\dfrac{A\sqrt{2}}{3}$ $\quad (1 \leq A \leq 20)$

0	[14,0,3]	6	[16,0,3]	7	[17,0,3]	8
1	[21,27,34]	1	[48,63,71]	1	[51,72,2]	72
2	[6,2,7]	1	[6,1,8]	1	[17,24,3]	16
3	[42,35,47]	2	[48,56,23]	5	[51,72,2]	
4	[42,59,1]	118	[48,59,49]	2		
5	[42,59,47]	2	[16,13,21]	1		
6	[6,5,7]	1	[6,3,8]	1		
7	[21,7,34]	1	[48,40,47]	2		
8	[14,18,3]	12	[8,9,6]	3		
9	[21,27,34]		[48,54,47]	2		
10			[6,5,8]	1		
11			[16,8,21]	1		
12			[48,39,49]	2		
13			[48,59,23]	5		
14			[6,7,8]	1		
15			[48,8,71]	1		
16			[16,21,3]	14		
17			[48,63,71]			
0	[19,0,3]	8	[20,0,3]	9		
1	[57,72,146]	1	[60,81,71]	2		
2	[57,74,7]	22	[60,61,49]	2		
3	[57,80,14]	11	[60,37,119]	1		
4	[57,74,73]	2	[30,41,2]	41		
5	[19,24,6]	8	[60,82,119]	1		
6	[57,72,73]	2	[60,37,49]	2		
7	[57,74,14]	11	[60,61,71]	2		
8	[57,80,7]	22	[20,27,3]	18		
9	[57,74,146]	1	[60,81,71]			
10	[19,24,3]	16				
11	[57,72,146]					

.

表 3: $\dfrac{A\sqrt{2}}{5}$ $(1 \leq A \leq 20)$

n	[A,B,C]	[α_n]	[A,B,C]	[α_n]	[A,B,C]	[α_n]
0	[1,0,5]	0	[2,0,5]	0	[3,0,5]	0
1	[5,0,2]	3	[5,0,4]	1	[5,0,6]	1
2	[5,6,7]	1	[10,8,17]	1	[15,18,7]	5
3	[5,1,7]	1	[10,9,7]	3	[15,17,23]	1
4	[5,6,2]	6	[5,6,4]	3	[5,2,6]	1
5	[5,6,7]		[10,12,7]	3	[15,12,17]	1
6			[10,9,17]	1	[3,1,5]	1
7			[5,4,4]	2	[15,20,2]	20
8			[10,8,17]		[3,4,5]	1
9					[15,5,17]	1
10					[5,4,6]	1
11					[15,6,23]	1
12					[15,17,7]	5
13					[5,6,6]	2
14					[15,18,7]	
0	[4,0,5]	1	[6,0,5]	1	[7,0,5]	1
1	[20,25,7]	7	[30,25,47]	1	[35,25,73]	1
2	[5,6,8]	1	[15,11,14]	2	[35,48,2]	48
3	[20,8,23]	1	[30,34,23]	3	[35,48,73]	1
4	[4,3,5]	1	[6,7,5]	3	[7,5,5]	2
5	[10,5,14]	1	[15,20,4]	10	[35,25,73]	
6	[20,18,17]	2	[6,8,5]	3		
7	[5,4,8]	1	[30,35,23]	3		
8	[20,16,17]	2	[15,17,14]	2		
9	[10,9,14]	1	[30,22,47]	1		
10	[4,2,5]	1	[6,5,5]	2		
11	[20,15,23]	1	[30,25,47]			
12	[5,2,8]	1				
13	[20,24,7]	7				
14	[4,5,5]	2				
15	[20,25,7]					
0	[8,0,5]	2	[9,0,5]	2	[11,0,5]	3
1	[20,25,14]	3	[45,50,62]	1	[55,75,17]	8
2	[40,34,73]	1	[15,4,21]	1	[55,61,137]	1
3	[40,39,23]	4	[45,51,23]	4	[55,76,2]	76
4	[40,53,17]	6	[45,41,103]	1	[55,76,137]	1
5	[40,49,47]	2	[45,62,2]	62	[55,61,17]	8
6	[8,9,5]	4	[45,62,103]	1	[11,15,5]	6

.

表 3: $\dfrac{A\sqrt{2}}{5} \quad (1 \le A \le 20)$

7	[40,55,7]	15	[45,41,23]	4	[55,75,17]	
8	[4,5,10]	1	[15,17,21]	1		
9	[40,50,7]	15	[45,12,62]	1		
10	[8,11,5]	4	[9,10,5]	4		
11	[40,45,47]	2	[45,50,62]			
12	[40,49,17]	6				
13	[40,53,23]	4				
14	[40,39,73]	1				
15	[20,17,14]	3				
16	[8,10,5]	4				
17	[20,25,14]					
0	[13,0,5]	3	[14,0,5]	3	[16,0,5]	4
1	[65,75,113]	1	[70,75,167]	1	[20,25,28]	1
2	[65,38,62]	2	[35,46,4]	23	[80,12,113]	1
3	[65,86,17]	10	[70,92,167]	1	[80,101,23]	9
4	[65,84,82]	2	[14,15,5]	6	[40,53,34]	3
5	[13,16,5]	6	[70,75,167]		[80,98,47]	4
6	[65,70,142]	1			[8,9,10]	2
7	[65,72,23]	7			[80,110,7]	31
8	[65,89,23]	7			[80,107,193]	1
9	[65,72,142]	1			[40,43,14]	7
10	[13,14,5]	6			[16,22,5]	8
11	[65,80,82]	2			[40,45,94]	1
12	[65,84,17]	10			[80,98,17]	12
13	[65,86,62]	2			[40,53,46]	2
14	[65,38,113]	1			[80,78,73]	2
15	[13,15,5]	6			[20,17,28]	1
16	[65,75,113]				[80,44,97]	1
17					[80,53,103]	1
18					[8,5,10]	1
19					[80,50,103]	1
20					[80,53,97]	1
21					[20,11,28]	1
22					[80,68,73]	2
23					[40,39,46]	2
24					[80,106,17]	12
25					[40,49,94]	1
26					[16,18,5]	8
27					[40,55,14]	7

.

表 3: $\dfrac{A\sqrt{2}}{5}$ $(1 \le A \le 20)$

28					[80,86,193]	1
29					[80,107,7]	31
30					[8,11,10]	2
31					[80,90,47]	4
32					[40,49,34]	3
33					[80,106,23]	9
34					[80,101,113]	1
35					[20,3,28]	1
36					[16,20,5]	8
37					[20,25,28]	
0	[17,0,5]	4	[18,0,5]	5	[19,0,5]	5
1	[85,100,178]	1	[90,125,23]	10	[95,125,97]	2
2	[85,78,47]	4	[6,7,15]	1	[95,69,137]	1
3	[17,22,10]	4	[45,60,4]	30	[95,68,98]	2
4	[85,90,127]	1	[6,8,15]	1	[95,128,17]	15
5	[85,37,103]	1	[90,105,23]	10	[95,127,113]	2
6	[85,66,98]	1	[18,25,5]	10	[95,99,73]	3
7	[85,32,137]	1	[90,125,23]		[19,24,10]	5
8	[17,21,5]	9			[95,130,23]	11
9	[85,120,2]	120			[95,123,127]	2
10	[17,24,5]	9			[95,131,7]	37
11	[85,105,137]	1			[95,128,238]	1
12	[85,32,98]	1			[19,22,5]	9
13	[85,66,103]	1			[95,115,193]	1
14	[85,37,127]	1			[95,78,62]	3
15	[17,18,10]	4			[95,108,103]	2
16	[85,110,47]	4			[95,98,82]	2
17	[85,78,178]	1			[95,66,167]	1
18	[17,20,5]	8			[95,101,47]	5
19	[85,100,178]				[95,134,2]	134
20					[95,134,47]	5
21					[95,101,167]	1
22					[95,66,82]	2
23					[95,98,103]	2
24					[95,108,62]	3
25					[95,78,193]	1
26					[19,23,5]	9
27					[95,110,238]	1
28					[95,128,7]	37

.

表 3: $\frac{A\sqrt{2}}{5}$ $(1 \leq A \leq 20)$

29			[95,131,127]	2
30			[95,123,23]	11
31			[19,26,10]	5
32			[95,120,73]	3
33			[95,99,113]	2
34			[95,127,17]	15
35			[95,128,98]	2
36			[95,68,137]	1
37			[95,69,97]	2
38			[19,25,5]	10
39			[95,125,97]	

.

表 4: $\frac{A\sqrt{2}}{14}$ $(1 \le A \le 20)$

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[1,0,14]	0	[3,0,14]	0	[5,0,14]	0
1	[7,0,1]	9	[7,0,3]	3	[7,0,5]	1
2	[7,9,17]	1	[21,27,17]	3	[35,25,73]	1
3	[7,8,2]	8	[7,8,6]	2	[35,48,2]	48
4	[7,8,17]	1	[21,12,41]	1	[35,48,73]	1
5	[7,9,1]	18	[21,29,1]	58	[7,5,5]	2
6	[7,9,17]		[21,29,41]	1	[35,25,73]	
7			[7,4,6]	2		
8			[21,24,17]	3		
9			[7,9,3]	6		
10			[21,27,17]			
0	[9,0,14]	0	[11,0,14]	1	[13,0,14]	1
1	[7,0,9]	1	[77,98,23]	8	[91,98,71]	3
2	[63,81,17]	10	[77,86,194]	1	[91,115,47]	5
3	[63,89,1]	178	[77,108,1]	216	[91,120,46]	5
4	[63,89,17]	10	[77,108,194]	1	[91,110,97]	2
5	[7,9,9]	2	[77,86,23]	8	[13,12,14]	2
6	[63,81,17]		[11,14,14]	2	[91,112,41]	5
7			[77,98,23]		[91,93,193]	1
8					[91,100,34]	6
⋮					⋮	⋮
15					[91,108,158]	1
16					[91,50,89]	2
17					[91,128,2]	128
18					[91,128,89]	2
19					[91,50,158]	1
⋮					⋮	⋮
26					[91,104,34]	6
27					[91,100,193]	1
28					[91,93,41]	5
29					[13,16,14]	2
30					[91,84,97]	2
31					[91,110,46]	5
32					[91,120,47]	5
33					[91,115,71]	3
34					[13,14,14]	2
35					[91,98,71]	

.

表 4: $\dfrac{A\sqrt{2}}{14}$ $\quad (1 \leq A \leq 20)$

0	[15,0,14]	1	[17,0,14]	1	[19,0,14]	1
1	[105,98,127]	1	[119,98,191]	1	[133,98,263]	1
2	[105,29,167]	1	[119,93,103]	2	[133,165,31]	11
3	[35,46,6]	15	[119,113,151]	1	[133,176,142]	2
4	[105,132,257]	1	[119,38,178]	1	[133,108,167]	1
5	[21,25,5]	10	[17,20,7]	6	[133,59,191]	1
6	[105,125,257]	1	[119,154,94]	3	$\vdots$	$\vdots$
7	[35,44,6]	15	[119,128,127]	2	$\vdots$	$\vdots$
8	[105,138,167]	1	[17,18,14]	3	$\vdots$	$\vdots$
9	[105,29,127]	1	[119,168,1]	336	$\vdots$	$\vdots$
10	[15,14,14]	2	[17,24,14]	3	$\vdots$	$\vdots$
11	[105,98,127]		[119,126,127]	2	$\vdots$	$\vdots$
12			[119,128,94]	3	$\vdots$	$\vdots$
13			[17,22,7]	6	$\vdots$	$\vdots$
14			[119,140,178]	1	$\vdots$	$\vdots$
15			[119,38,151]	1	$\vdots$	$\vdots$
16			[119,113,103]	2	$\vdots$	$\vdots$
17			[119,93,191]	1	$\vdots$	$\vdots$
18			[17,14,14]	2	[19,16,14]	3
19			[119,98,191]		[133,182,23]	16
20					[133,186,34]	11
21					[133,188,1]	376
22					[133,188,34]	11
23					[133,186,23]	16
24					[19,26,14]	3
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
37					[133,132,191]	1
38					[133,59,167]	1
39					[133,108,142]	2
40					[133,176,31]	11
41					[133,165,263]	1
42					[19,14,14]	2
43					[133,98,263]	

.

3.3 $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C = P : P$ は素数）

表 5: $\frac{\sqrt{2}}{C}$（ $C = P : P$ は 1 から 19 までの素数）

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[1,0,1]	1	[1,0,2]	0	[1,0,3]	0
1	[1,1,1]	2	[1,0,1]	1	[3,0,2]	2
2	[1,1,1]		[1,1,1]	2	[3,4,1]	8
3			[1,1,1]		[3,4,2]	4
4					[3,4,1]	
0	[1,0,5]	0	[1,0,7]	0	[1,0,11]	0
1	[5,0,2]	3	[7,0,2]	4	[11,0,2]	7
2	[5,6,7]	1	[7,8,17]	1	[11,14,23]	1
3	[5,1,7]	1	[7,9,1]	18	[11,9,7]	3
4	[5,6,2]	6	[7,9,17]	1	[11,12,14]	1
5	[5,6,7]		[7,8,2]	8	[11,2,17]	1
6			[7,8,17]		[11,15,1]	30
7					[11,15,17]	1
8					[11,2,14]	1
9					[11,12,7]	3
10					[11,9,23]	1
11					[11,14,2]	14
12					[11,14,23]	
0	[1,0,13]	0	[1,0,17]	0	[1,0,19]	0
1	[13,0,2]	9	[17,0,2]	12	[19,0,2]	13
2	[13,18,7]	5	[17,24,1]	48	[19,26,23]	2
3	[13,17,7]	5	[17,24,2]	24	[19,20,14]	3
4	[13,18,2]	18	[17,24,1]		[19,22,17]	2
5	[13,18,7]				[19,12,34]	1
6					[19,22,7]	6
7					[19,20,46]	1
8					[19,26,1]	52
9					[19,26,46]	1
10					[19,20,7]	6
11					[19,22,34]	1
12					[19,12,17]	2
13					[19,22,14]	3
14					[19,20,23]	2
15					[19,26,2]	26
16					[19,26,23]	

.

表 6: $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C = P : P$ は素数 ）循環節のセンターが偶数のもの

n	[A,B,C]	[α_n]	[A,B,C]	[α_n]	[A,B,C]	[α_n]
0	[1,0,29]	0	[1,0,37]	0	[1,0,53]	0
1	[29,0,2]	20	[37,0,2]	26	[53,0,2]	37
2	[29,40,41]	1	[37,52,17]	6	[53,74,71]	2
3	[29,1,41]	1	[37,50,14]	7	[53,68,14]	10
4	[29,40,2]	40	[37,48,31]	3	[53,72,31]	4
5	[29,40,41]		[37,45,23]	4	[53,52,94]	1
6			[37,47,23]	4	[53,42,41]	2
7			[37,45,31]	3	[53,40,98]	1
8			[37,48,14]	7	[53,58,23]	5
9			[37,50,17]	6	[53,57,103]	1
10			[37,52,2]	52	[53,46,34]	3
11			[37,52,17]		[53,56,73]	1
12					[53,17,73]	1
13					[53,56,34]	3
14					[53,46,103]	1
15					[53,57,23]	5
16					[53,58,98]	1
17					[53,40,41]	2
18					[53,42,94]	1
19					[53,52,31]	4
20					[53,72,14]	10
21					[53,68,71]	2
22					[53,74,2]	74
23					[53,74,71]	
0	[1,0,61]	0	[1,0,101]	0	[1,0,109]	0
1	[61,0,2]	43	[101,0,2]	71	[109,0,2]	77
2	[61,86,23]	7	[101,142,119]	2	[109,154,23]	13
3	[61,75,79]	2	[101,96,94]	2	[109,145,119]	2
4	[61,83,7]	24	[101,92,127]	1	[109,93,127]	1
5	[61,85,31]	5	[101,35,151]	1	[109,34,178]	1
6	[61,70,82]	1	[101,116,46]	5	[109,144,17]	17
7	[61,12,89]	1	[101,114,161]	1	[109,145,161]	1
8	[61,77,17]	9	[101,47,113]	1	[109,16,146]	1
9	[61,76,98]	1	[101,66,142]	1	[109,130,47]	6
10	[61,22,71]	1	[101,76,103]	2	[109,152,14]	21
11	[61,49,71]	1	[101,130,34]	8	[109,142,257]	1
12	[61,22,98]	1	[101,142,7]	40	[109,115,41]	6
13	[61,76,17]	9	[101,138,194]	1	[109,131,161]	1

.

表 6: $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C=P:P$ は素数 ）循環節のセンターが偶数のもの

14	[61,77,89]	1	[101,56,89]	2	[109,30,142]	1
15	[61,12,82]	1	[101,122,62]	4	[109,112,79]	3
16	[61,70,31]	5	[101,126,73]	3	[109,125,103]	2
17	[61,85,7]	24	[101,93,161]	1	[109,81,167]	1
18	[61,83,79]	2	[101,68,98]	2	[109,86,98]	2
19	[61,75,23]	7	[101,128,41]	6	[109,110,119]	2
20	[61,86,2]	86	[101,118,158]	1	[109,128,62]	4
21	[61,86,23]		[101,40,119]	1	[109,120,151]	1
22			[101,79,119]	1	[109,31,151]	1
23			[101,40,158]	1	[109,120,62]	4
24			[101,118,41]	6	[109,128,119]	2
25			[101,128,98]	2	[109,110,98]	2
26			[101,68,161]	1	[109,86,167]	1
27			[101,93,73]	3	[109,81,103]	2
28			[101,126,62]	4	[109,125,79]	3
29			[101,122,89]	2	[109,112,142]	1
30			[101,56,194]	1	[109,30,161]	1
31			[101,138,7]	40	[109,131,41]	6
32			[101,142,34]	8	[109,115,257]	1
33			[101,130,103]	2	[109,142,14]	21
34			[101,76,142]	1	[109,152,47]	6
35			[101,66,113]	1	[109,130,146]	1
36			[101,47,161]	1	[109,16,161]	1
37			[101,114,46]	5	[109,145,17]	17
38			[101,116,151]	1	[109,144,178]	1
39			[101,35,127]	1	[109,34,127]	1
40			[101,92,94]	2	[109,93,119]	2
41			[101,96,119]	2	[109,145,23]	13
42			[101,142,2]	142	[109,154,2]	154
43			[101,142,119]		[109,154,23]	
0	[1,0,137]	0	[1,0,149]	0	[1,0,157]	0
1	[137,0,2]	96	[149,0,2]	105	[157,0,2]	111
2	[137,192,337]	1	[149,210,151]	2	[157,222,7]	63
3	[137,145,49]	6	[149,92,238]	1	[157,219,191]	2
4	[137,149,313]	1	[149,146,97]	3	[157,163,119]	3
5	[137,164,34]	10	[149,145,241]	1	[157,194,98]	4
6	[137,176,193]	1	[149,96,146]	2	[157,198,103]	4
7	[137,17,193]	1	[149,196,41]	9	[157,214,34]	12
8	[137,176,34]	10	[149,173,353]	1	[157,194,343]	1

.

表 6: $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C = P : P$ は素数 ）循環節のセンターが偶数のもの

9	[137,164,313]	1	[149,180,34]	11	[157,149,79]	4
10	[137,149,49]	6	[149,194,199]	2	[157,167,271]	1
11	[137,145,337]	1	[149,204,14]	29	[157,104,142]	2
12	[137,192,2]	192	[149,202,257]	1	[157,180,119]	3
13	[137,192,337]		[149,55,161]	1	[157,177,151]	2
14			[149,106,206]	1	[157,125,223]	1
⋮			⋮	⋮	⋮	⋮
26			[149,98,137]	2	[157,159,73]	5
27			[149,176,98]	3	[157,206,94]	4
28			[149,118,311]	1	[157,170,217]	1
29			[149,193,23]	17	[157,47,217]	1
30			[149,198,226]	1	[157,170,94]	4
31			[149,28,193]	1	[157,206,73]	5
⋮			⋮	⋮	⋮	⋮
43			[149,78,161]	1	[157,98,223]	1
44			[149,83,233]	1	[157,125,151]	2
45			[149,150,94]	3	[157,177,119]	3
46			[149,132,287]	1	[157,180,142]	2
47			[149,155,71]	5	[157,104,271]	1
48			[149,200,62]	6	[157,167,79]	4
49			[149,180,353]	1	[157,149,343]	1
50			[149,173,41]	9	[157,194,34]	12
51			[149,196,146]	2	[157,214,103]	4
52			[149,96,241]	1	[157,198,98]	4
53			[149,145,97]	3	[157,194,119]	3
54			[149,146,238]	1	[157,163,191]	2
55			[149,92,151]	2	[157,219,7]	63
56			[149,210,2]	210	[157,222,2]	222
57			[149,210,151]		[157,222,7]	
0	[1,0,173]	0	[1,0,181]	0	[1,0,197]	0
1	[173,0,2]	122	[181,0,2]	127	[197,0,2]	139
2	[173,244,161]	3	[181,254,503]	1	[197,278,167]	3
3	[173,239,17]	28	[181,249,7]	72	[197,223,167]	3
4	[173,237,217]	2	[181,255,71]	7	[197,278,2]	278
5	[173,197,97]	4	[181,242,98]	5	[197,278,167]	
6	[173,191,241]	1	[181,248,41]	12		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
27	⋮	⋮	[181,238,23]	21		

.

表 6: $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C = P : P$ は素数 ）循環節のセンターが偶数のもの

28	⋮	⋮	[181,245,239]	2	
29	[173,196,302]	1	[181,233,47]	10	
30	[173,106,161]	2	[181,237,199]	2	
31	[173,216,82]	5	[181,161,199]	2	
32	[173,194,271]	1	[181,237,47]	10	
33	[173,77,199]	1	[181,233,239]	2	
34	[173,122,226]	1	[181,245,23]	21	
35	[173,104,217]	1	⋮	⋮	
36	[173,113,217]	1	⋮	⋮	
37	[173,104,226]	1	⋮	⋮	
38	[173,122,199]	1	⋮	⋮	
39	[173,77,271]	1	⋮	⋮	
40	[173,194,82]	5	⋮	⋮	
41	[173,216,161]	2	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
55	⋮	⋮	[181,244,41]	12	
56	⋮	⋮	[181,248,98]	5	
57	⋮	⋮	[181,242,71]	7	
58	⋮	⋮	[181,255,7]	72	
59	⋮	⋮	[181,249,503]	1	
60	⋮	⋮	[181,254,2]	254	
61	⋮	⋮	[181,254,503]		
62	⋮	⋮			
⋮	⋮	⋮			
65	[173,50,241]	1			
66	[173,191,97]	4			
67	[173,197,217]	2			
68	[173,237,17]	28			
69	[173,239,161]	3			
70	[173,244,2]	244			
71	[173,244,161]				

.

3.4 $\frac{\sqrt{2}}{C}$ （C は $P \equiv 5(mod8)$ の素数 $\times 2$）

表 7: $\frac{\sqrt{2}}{C}$ （C は $5, 13, 29, 37, 53, 61 \times 2$）

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[1, 0, 5*2]	0	[1, 0, 13*2]	0	[1, 0, 29*2]	0
1	[5, 0, 1]	7	[13, 0, 1]	18	[29, 0, 1]	41
2	[5, 7, 1]	14	[13, 18, 14]	2	[29, 41, 1]	82
3	[5, 7, 1]		[13, 10, 17]	1	[29, 41, 1]	
4			[13, 7, 17]	1		
5			[13, 10, 14]	2		
6			[13, 18, 1]	36		
7			[13, 18, 14]			
0	[1, 0, 37*2]	0	[1, 0, 53*2]	0	[1, 0, 61*2]	0
1	[37, 0, 1]	52	[53, 0, 1]	74	[61, 0, 1]	86
2	[37, 52, 34]	3	[53, 74, 142]	1	[61, 86, 46]	3
3	[37, 50, 7]	14	[53, 68, 7]	20	[61, 52, 103]	1
4	[37, 48, 62]	1	[53, 72, 62]	2	[61, 51, 47]	2
5	[37, 14, 41]	1	[53, 52, 47]	2	[61, 43, 119]	1
6	[37, 27, 49]	1	[53, 42, 82]	1	[61, 76, 14]	11
7	[37, 22, 46]	1	[53, 40, 49]	2	[61, 78, 97]	1
8	[37, 24, 47]	1	[53, 58, 46]	2	[61, 19, 73]	1
9	[37, 23, 47]	1	[53, 34, 97]	1	[61, 54, 62]	2
10	[37, 24, 46]	1	[53, 63, 17]	8	[61, 70, 41]	3
11	[37, 22, 49]	1	[53, 73, 17]	8	[61, 53, 113]	1
12	[37, 27, 41]	1	[53, 63, 97]	1	[61, 60, 34]	4
13	[37, 14, 62]	1	[53, 34, 46]	2	[61, 76, 49]	3
14	[37, 48, 7]	14	[53, 58, 49]	2	[61, 71, 49]	3
15	[37, 50, 34]	3	[53, 40, 82]	1	[61, 76, 34]	4
16	[37, 52, 1]	104	[53, 42, 47]	2	[61, 60, 113]	1
17	[37, 52, 34]		[53, 52, 62]	2	[61, 53, 41]	3
18			[53, 72, 7]	20	[61, 70, 62]	2
19			[53, 68, 142]	1	[61, 54, 73]	1
20			[53, 74, 1]	148	[61, 19, 97]	1
21			[53, 74, 142]		[61, 78, 14]	11
22					[61, 76, 119]	1
23					[61, 43, 47]	2
24					[61, 51, 103]	1
25					[61, 52, 46]	3
26					[61, 86, 1]	172

.

表 7: $\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（C は $5, 13, 29, 37, 53, 61 \times 2$）

27			[61, 86, 46]

.

4　考察

4.1　ひげの長さが 1 の場合と 2 の場合について

$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}(1 \leq A, C \leq 20; gcd(A, C) = 1)$ の計算の結果（表 1）から、$1 < \dfrac{A\sqrt{M}}{C}$ のとき、ひげは 1。$0 < \dfrac{A\sqrt{M}}{C} < 1$ のとき、ひげは 2 と予想が立てられた。これをガロアの定理を使い証明する。

ガロアの定理

有理係数の既約な 2 次方程式の解を $\alpha = a + b\sqrt{m}, \bar{\alpha} = a - b\sqrt{m}$ とする。$-1 < \bar{\alpha} < 0$ かつ $\alpha > 1$ ならば α は純循環する

なお定理の証明は 2006 年度卒業の佐藤亮介さんが証明している。

証明　$\alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} > 1$ のとき。
$[\alpha] = m$ とおくと、$m \geq 1$ である。
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - m}$ とする。
$0 < \alpha - m < 1$ なので $\alpha_1 > 1$ は明らかである。
次に α_1 の共役　$\bar{\alpha}$ を考える。
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\dfrac{-A\sqrt{2}}{C} - m} = \frac{-1}{\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m}$$
今 $\dfrac{A\sqrt{2}}{C} = \alpha > 1, m = [\alpha] \geq 1$ なので $\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m > 1$
よって $-1 < \bar{\alpha} = \dfrac{-1}{\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m} < 0$ である。
以上よりガロアの定理が成り立ち、$\alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} > 1$ のとき α_1 から純循環するためひげの長さは 1 である。

$0 < \alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} < 1$ のとき。
$[\alpha] = m$ とおくと、$m = 0$ である。
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - m}$ とする。
$m = 0$ より、$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha}.0 < \alpha < 1$ より$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha} > 1$
$m_1 = [\alpha_1]$ とおくと、$m_1 \geq 1$ である。
$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - m_1}$ とすると, 上記と同様にして α_2 にガロアの定理が成り立つ
よって、$0 < \alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} < 1$ のとき α_2 から純循環するためひげの長さは 2 である
（証明終）

4.2　連分数展開のセンターについて

循環節は最終項を除くとセンターの数を基準として対象性がある。多くの 2 次無理数 α はセンターが奇数個あり点対称である。しかしまれにセンターが偶数個あり線対称になる数がある。その数を $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ で探したところおもしろい結果が得られた。以下の数がセンターが偶数個あるものであると研究結果（別紙 ;「表（$.excel$ ファイル）」参照）より予想をたてた。なお表ではセンターを赤字で背景が黄色で示してある

(1)$A=1$ で C が $\alpha\equiv 5(mod8)$ の素数。（表 $1,2$ ではスカイブルーの数字）

(2) 上記の例外として C が $\alpha\equiv 1(mod8)$ のいくつかの素数。$(1,137,521,569,593,857,953)$（表 $1,2$ ではオレンジの数字）

(3)$A=1,C=2$ のときセンターが偶数個 {0 個}（表 $1,2$ では赤の数字）

(4)$A=1$ で C が (1)(2) の素数 $\times 2$(表 3)

$(4')A$ が (1)(2) で $C=1$ のとき {4 の α_1 が $4'$ になっている}（表 3）

(5)$A=$(1)(2) で C が (1)(2)(3)(4) の数（表 1 の緑の数字）

(6) 分子が偶数になるものはセンターが偶数にはならない

4.3　今後の課題

・循環節のセンターが偶数個になる数が、今回の研究で発見された数以外にないか調べる（(1)(2)(4) の C の調べる範囲の幅を広げる）

・1000 以上の数では C が $P\equiv 5(mod8)$ の素数で循環節のセンターが偶数個になるという予想が成り立つか調べる。

・(5), (6) についてはまだ調べた数が少ないので当てはまる数をさらに研究する。

・今回の研究で連分数展開のセンターについてたてられた予想を証明する

4.4 連分数の魅力

今回のプログラムは α を決めて連分数展開を行い研究したが，逆にひげの数と循環節を与えて α を求めるのも面白いのである．(プログラムを作るとなると頭が痛くなるところだが)
簡単な例で α を求めてみよう．
例） α は正の 2 次無理数であり，α の連分数展開を [1,2,2,4] とする．
これは

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\alpha}}}}$$

とゆうことである．この連分数を計算していくと α の 2 次方程式ができあがる．
$\alpha = \dfrac{31\alpha + 7}{22\alpha + 5}$
$22\alpha^2 - 26\alpha - 7 = 0$
解の公式より
$\alpha = \dfrac{13\sqrt{323}}{22}$
よって $\dfrac{13\sqrt{323}}{22}$ を連分数展開すると $1, 2, 2, 4, 1, 2, 2, 4, \cdots$ と純循環するのだ．
このように連分数を利用するとある数字の羅列を 1 つの特別な数で表すことができる。例に使った [1,2,2,4]，つまりクリスマスイヴも 1 つの特別な数 $\dfrac{13\sqrt{323}}{22}$ で表すことができた。
とても魅力的なことではないだろうか．これを読んだ皆さんにもぜひ連分数を使って記念日や大切な人の誕生日を 1 つの特別な数で表し、普段とは違ったロマンチックな数学を味わってほしい．

5　感想

今回の研究は本当に困難だったそして本当に楽しかったまず Prolog を学ぶことはとても面白かった自分のつくったプログラムが初めて正常に作動したときは涙がでるくらい嬉しかったのを覚えている後期に入り自分の研究していく分野が連分数に決まったときは意気揚々としていたが，この連分数という分野が難関だったプログラムをつくる際 Prolog を結構理解したつもりでいたが，何度やっても正常に作動せず一人ではとても完成できなかった飯高先生に助言をいただきプログラムが何とか完成したものの，与えられた課題から予想された結果がまったく出てこなかったり，出てきた結果に規則性をなかなか見つけられなかったり大変だったやっと見つけた規則性も証明するには難しすぎるし時間もなかったその点はとても悔しい

しかし私は今回の研究で数学の持つ魅力を再確認することが出来た簡単な操作なのにプログラムの中では複雑な操作が行われているという奥深さ，そのようなプログラムをつくりあげた時の達成感，連分数のもつ循環性の美しさこのよな数学にふれあい，研究することが出来て本当に良かった

また今回の研究をやり遂げるにあたり飯高先生をはじめ，同じ研究室の仲間には本当に助けられたこのメンバーだから楽しんで学び研究できたと思うこの場を借りて感謝を述べたい

最後にこの論文を読んで頂いた皆様へ最後までお付き合い頂き，本当にありがとうございました

橋本博信