連分数の循環性とセンターの研究

橋本博信
学習院大学理学部数学科

Contents

1. 目的

連分数とは

$$\alpha = N_0 + \cfrac{1}{N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$

αが2次無理数のとき数列$N_0, N_1, N_2, N_3 \cdots$は，繰り返しがおこることが知られている．繰り返す部分を循環節といい，その長さを周期という．循環節に行くまでのところをひげという．

研究目的

今回の研究では、$\alpha = \dfrac{A\sqrt{M}+B}{C}\,(A,B,C,M \in Z)$という形を用いる．これは，$a,b$を有理数とするとき$\alpha = a\sqrt{M}+b$を整数の組$[A,B,C]\,(\sqrt{M})$で表示するため、$a,b$の分母を共通の$C$にして、$a = \dfrac{A}{C}, b = \dfrac{B}{C}$とおき、$\alpha = \dfrac{A\sqrt{M}+B}{C}$としたもの．

今回の目的は$\sqrt{M}$を$M = 2$で固定し，$[A,B,C]$の値の変化によって、αの連分数展開における循環節、ひげの長さを研究することである。

2. 方法

連分数展開の方法

連分数展開を以下のように定義する。

αを2次無理数（> 0）とする。

$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$

となるように整数$[\alpha]$を取り出し、これをN_1とおく。$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1}$とする。

上記と同様にこの操作を繰り返し行う。

$$
\begin{gathered}
N_2 = [\alpha_1]\,,\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \\
N_3 = [\alpha_2]\,,\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - N_3} \\
N_4 = [\alpha_3]\,,\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - N_4} \\
\vdots \\
N_k = [\alpha_{k-1}]\,,\alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - N_k} \\
N_{k+1} = [\alpha_k]\,,\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - N_{k+1}} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{N_4 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{N_k + \cfrac{1}{N_{k+1} + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}$$

【循環連分数の表し方】

$$
\begin{aligned}
\alpha &= H_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}} \\
&= [H_1 | a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k]
\end{aligned}
$$

【純循環連分数の表し方】

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\vdots}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}$$

$$= [a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k]$$

実数の具体例

$$\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{2}、N_1 = [\alpha] = 4$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{7\sqrt{2}}{2} - 4} = \frac{7\sqrt{2}+8}{17}\ ,\ N_2 = [\alpha_1] = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\dfrac{7\sqrt{2}+8}{17} - 1} = \frac{7\sqrt{2}+9}{1}\ ,\ N_3 = [\alpha_2] = 18$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\dfrac{7\sqrt{2}+9}{1} - 18} = \frac{7\sqrt{2}+9}{17}\ ,\ N_4 = [\alpha_3] = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\dfrac{7\sqrt{2}+9}{17} - 1} = \frac{7\sqrt{2}+8}{2}\ ,\ N_5 = [\alpha_4] = 8$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\dfrac{7\sqrt{2}+8}{2} - 8} = \frac{7\sqrt{2}+8}{17} = \alpha_1$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}$$

$$= [\boxed{4}|1, \boxed{18}, 1, 8]$$

$\sqrt{n}(n \in Z)$の循環節はひげと最終項を除くと点対称性があることが知られている.

今回の研究では$\sqrt{2}$の有理数倍についての循環節の対称性を,ひげと循環節の最終項を除いた連分数展開のセンターに注目して調べた.

3. 表の見方

例） $\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

TABLE 1. 例

n	[A,B,C]	$[\alpha_n]$
0	[7,0,2]	4
1	[7,8,17]	1
2	[7,9,1]	18
3	[7,9,17]	1
4	[7,8,2]	8
5	[7,8,17]	

4. 調べた数

1.$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}((1 \leq A, C \leq 20)\,;\mathrm{gcd}(A, C) = 1)$

2.$\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（$C = P : P$は素数）

3.$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$

（A, Cが$P \equiv 5(\mathrm{mod}8)$の素数，$P \equiv 1(\mathrm{mod}8)$である

いくつかの素数 $\{137, 521, 569, 593, 857, 953\}$

4.$\dfrac{\sqrt{2}}{2C}$

（A, Cが$P \equiv 5(\mathrm{mod}8)$の素数，$P \equiv 1(\mathrm{mod}8)$である

いくつかの素数 $\{137, 521, 569, 593, 857, 953\}$

5. 結果，考察

ひげの長さが1の場合と2の場合について

$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}(1 \leq A, C \leq 20; \gcd(A, C) = 1)$の計算の結果から、

$1 < \dfrac{A\sqrt{M}}{C}$のとき、ひげは1。

$0 < \dfrac{A\sqrt{M}}{C} < 1$のとき、ひげは2と予想が立てられた。これをガロアの定理を使い証明する。

ガロアの定理

有理係数の既約な2次方程式の解を$\alpha = a + b\sqrt{m}, \bar{\alpha} = a - b\sqrt{m}$とする。$-1 < \bar{\alpha} < 0$ かつ $\alpha > 1$ならばαは純循環する

なお定理の証明は2006年度卒業の佐藤亮介さんの論文をもとに勉強した。

証明

（⊠）$\alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} > 1$

$[\alpha] = m$、$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - m}$

$m \geq 1$ より $0 < \alpha - m < 1$ なので $\alpha_1 > 1$ は明らかである

次に α_1 の共役 $\bar{\alpha}$ を考える。

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\dfrac{-A\sqrt{2}}{C} - m} = \frac{-1}{\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m}$$

$\dfrac{A\sqrt{2}}{C} = \alpha > 1, m = [\alpha] \geq 1$ なので $\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m > 1$

よって $-1 < \bar{\alpha} = \dfrac{-1}{\dfrac{A\sqrt{2}}{C} + m} < 0$

以上よりガロアの定理が成り立ち、このとき α は α_1 から純循環するためひげの長さは 1 である。

（⊠）$0 < \alpha = \dfrac{A\sqrt{2}}{C} < 1$

$[\alpha] = m$、$m = 0$

$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - m}$

$m = 0$ より , $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha}$

$0 < \alpha < 1$ より $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha} > 1$

$m_1 = [\alpha_1]$ とおくと、$m_1 \geq 1$ である。

$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - m_1}$ とすると, 上記と同様にして α_2 にガロアの定理が成り立つ

よって、このとき α は α_2 から純循環するためひげの長さは 2 である

（証明終）

$\sqrt{2}$の有理数倍についての循環性

多くの$\sqrt{2}$の有理数倍は循環節が点対称である.しかし循環節が線対称になる数がある.
その数は研究結果から次のような数だと考えられる.

循環節が線対称なる$\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$

(1)$A=1$でCが$P\equiv 5(\mathrm{mod}8)$の素数
(2) 上記の例外としてCが$P\equiv 1(\mathrm{mod}8)$である
いくつかの素数$(137,521,569,593,857,953)$
(3)A,Cが前項(1)(2)の数
(4)$A=1$でCが前項(1)(2)の素数$\times 2$

その他$\sqrt{2}$の有理数倍についての循環性で考えられること

(5) 分子が偶数のとき循環節が線対称になるものはなく
必ず点対称になる

(6) $\sqrt{2}$の有理数倍も$\sqrt{n}(n \in Z)$と同じく循環節はひげと
最終項を除くと対称性がある.

今後の課題

・循環節が線対称になる数が今回の研究で発見された数以外にないか調べる．特に前項(3), (5)にあてはまるものは調べた数が少ないのでより力を入れて研究していきたい．

・(1)$\dfrac{\sqrt{2}}{C}$（C が $P \equiv 5(\mathrm{mod} 8)$ の素数）は循環節が線対称．

(5) 分子が偶数のとき循環節が線対称になるものはなく必ず点対称．

(6)$\sqrt{2}$ の有理数倍も $\sqrt{n}(n \in Z)$ と同じく循環節はひげと最終項を除くと対称性がある．

これらの証明を試みる．

連分数の魅力

例）　与えられた整数列を循環節に持つ正の２次無理数である．例えば[1,2,2,4]が与えられたとき

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\alpha}}}}$$

となるので，この連分数を計算していくとαの２次方程式ができあがる．

$$\alpha = \frac{31\alpha + 7}{22\alpha + 5}$$
$$22\alpha^2 - 26\alpha - 7 = 0$$

解の公式より

$$\alpha = \frac{13 + \sqrt{323}}{22}$$

よって$\dfrac{13 + \sqrt{323}}{22}$を連分数展開すると$1, 2, 2, 4, \cdots$と純循環する

$$\alpha = \frac{13 + \sqrt{323}}{22} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$
$$= [1, 2, 2, 4]$$