フィボナッチ数列の周期

堀 将太朗
学習院大学理学部数学科

平成 25 年 2 月 1 日

目 次

1 目的

この研究ではフィボナッチ数列での P を法としたときの周期の関係性を探していく. そのなかで特に素数の場合に注目した.

2 方法

2.1 フィボナッチ数列

フィボナッチ数列とは、$f_0 = 1, f_1 = 1$ を初期条件にし、$n > 1$ のとき $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ で一般項を定義した数列をフィボナッチ数列という.

$$f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 8, f_6 = 13, f_7 = 21,$$

となる. この定義よりプログラムは以下のようにできる.

```
fb(N,F):- N>0,fb_aux([N,F],1,1,0).
fb_aux([N,F],N,F,F1).
fb_aux(Const,N,F,F1):- N1 is N + 1,F0 is F + F1,
fb_aux(Const,N1,F0,F).
```

2.2 mod$P$ でのべき

mod の数が P であるときの特性方程式 ($T^2 - T - 1 = 0$) の解を求めたい. そのプログラムは以下のようにできる.

```
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,I1 is I+1,
for(I1=<J,K).
map(P,T) :- P1 is P-1,
for(2=< P1,T),K is (T*T-T-1) mod P,K==0.
```

2.3 素因数分解

P の値の素因数分解をしたい. そのプログラムは以下のようにできる.

```
factor(P/2):- Q is P//2,P =:= 2*Q,!.
factor(P/I):- P1 is floor(sqrt(P)),
for(1=<P1,J),J1 is 2*J + 1,
Q is P//J1,
P =:= J1*Q,I=J1,!.
factor(P/P):- !.

factorize(P,[P]):- factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):- factor(P/I),
P1 is P//I,
List = [I|List1],
factorize(P1,List1),!.
```

2.4 まとめ

これら３つのプログラムを元にし、組合せて作ったのが以下のプログラムである. ＊素数の場合＊

```
g2(N,F1,F2,R,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
P1 is R-1,
P2 is R*R-1,
(C1<W->(F3 is (F1+F2) mod R,([F2,F3]=[1,0]->
```

```
   write(n=N1),put(9),
     P3 is P1/N1,
     P4 is P2/N1,
   write((p-1)/n=P3),put(9),
   write((pp-1)/n=P4),
     nl
        ;g2(N1,F2,F3,R,C1<W)));true).
buta3(R):-factorize(R,F),F=[R],
nl,
write(R),put(9).

goal2(L):- for(2=<L,R),buta3(R),
nl,write(r=R),put(9),
       g2(1,0,1,R,0<10000),fail.
```

＊素数×素数の場合＊

```
g(N,F1,F2,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
P1 is P-1,
P2 is P*P-1,
(C1<W->(F3 is (F1+F2) mod P,([F2,F3]=[1,0]->

   write(n=N1),put(9),
     P3 is P1/N1,
     P4 is P2/N1,
   write((p-1)/n=P3),put(9),
   write((pp-1)/n=P4),
     nl
        ;g(N1,F2,F3,P,C1<W)));true).
buta2(N,R,Q):-factorize(N,F),F=[R,Q],R<Q,
write(R*Q).
goal(L):- for(6=<L,N),buta2(N,R,Q),
nl,write(rq=N),put(9),g(1,0,1,N,0<10000),
           write(r=R),put(9),g(1,0,1,R,0<10000),
   write(q=Q),put(9),g(1,0,1,Q,0<10000),
       fail.
```

3　結果

まとめでかいた結果を Excel にまとめた表が以下である.
∗素数の場合∗

表 1: 素数の周期表

素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
2	3	0.333333	1
3	8	0.25	1
5	20	0.2	1.2
7	16	0.375	3
11	10	1	12
13	28	0.428571	6
17	36	0.444444	8
19	18	1	20
23	48	0.458333	11
29	14	2	60
31	30	1	32
37	76	0.473684	18
41	40	1	42
43	88	0.477273	21
47	32	1.4375	69
53	108	0.481481	26
59	58	1	60
61	60	1	62
67	136	0.485294	33
71	70	1	72
73	148	0.486486	36
79	78	1	80
83	168	0.488095	41
89	44	2	180
97	196	0.489796	48
101	50	2	204
103	208	0.490385	51
107	72	1.47222	159
109	108	1	110
113	76	1.47368	168
127	256	0.492188	63
131	130	1	132

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 1: 素数の周期表

素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
137	276	0.492754	68
139	46	3	420
149	148	1	150
151	50	3	456
157	316	0.493671	78
163	328	0.493902	81
167	336	0.494048	83
173	348	0.494253	86
179	178	1	180
181	90	2	364
191	190	1	192
193	388	0.494845	96
197	396	0.494949	98
199	22	9	1800
211	42	5	1060
223	448	0.495536	111
227	456	0.495614	113
229	114	2	460
233	52	4.46154	1044
239	238	1	240
241	240	1	242
251	250	1	252
257	516	0.496124	128
263	176	1.48864	393
269	268	1	270
271	270	1	272
277	556	0.496403	138
281	56	5	1410
283	568	0.496479	141
293	588	0.496599	146
307	88	3.47727	1071
311	310	1	312
313	628	0.496815	156
317	636	0.496855	158
331	110	3	996
337	676	0.497041	168

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 1: 素数の周期表

素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
347	232	1.49138	519
349	174	2	700
353	236	1.49153	528
359	358	1	360
367	736	0.497283	183
373	748	0.497326	186
379	378	1	380
383	768	0.497396	191
389	388	1	390
397	796	0.497487	198
401	200	2	804
409	408	1	410
419	418	1	420
421	84	5	2110
431	430	1	432
433	868	0.497696	216
439	438	1	440
443	888	0.497748	221
449	448	1	450
457	916	0.497817	228
461	46	10	4620
463	928	0.497845	231
467	936	0.497863	233
479	478	1	480
487	976	0.497951	243
491	490	1	492
499	498	1	500

括弧内の数値は標準誤差を表している.

＊素数×素数の場合＊

表 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
6	24	0.208333	1.45833
10	60	0.15	1.65
14	48	0.270833	4.0625
15	40	0.35	5.6
21	16	1.25	27.5
22	30	0.7	16.1
26	84	0.297619	8.03571
33	40	0.8	27.2
34	36	0.916667	32.0833
35	80	0.425	15.3
38	18	2.05556	80.1667
39	56	0.678571	27.1429
46	48	0.9375	44.0625
51	72	0.694444	36.1111
55	20	2.7	151.2
57	72	0.777778	45.1111
58	42	1.35714	80.0714
62	30	2.03333	128.1
65	140	0.457143	30.1714
69	48	1.41667	99.1667
74	228	0.320175	24.0132
77	80	0.95	74.1
82	120	0.675	56.025
85	180	0.466667	40.1333
86	264	0.32197	28.0114
87	56	1.53571	135.143
91	112	0.803571	73.9286
93	120	0.766667	72.0667
94	96	0.96875	92.0313
95	180	0.522222	50.1333
106	108	0.972222	104.028
111	152	0.723684	81.0526
115	240	0.475	55.1
118	174	0.672414	80.0172

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
119	144	0.819444	98.3333
122	60	2.01667	248.05
123	40	3.05	378.2
129	88	1.45455	189.091
133	144	0.916667	122.833
134	408	0.32598	44.0074
141	32	4.375	621.25
142	210	0.671429	96.0143
143	140	1.01429	146.057
145	140	1.02857	150.171
146	444	0.326577	48.0068
155	60	2.56667	400.4
158	78	2.01282	320.038
159	216	0.731481	117.037
161	48	3.33333	540
166	168	0.982143	164.018
177	232	0.758621	135.034
178	132	1.34091	240.023
183	120	1.51667	279.067
185	380	0.484211	90.0632
187	180	1.03333	194.267
194	588	0.328231	64.0051
201	136	1.47059	297.059
202	150	1.34	272.02
203	112	1.80357	367.929
205	40	5.1	1050.6
206	624	0.328526	68.0048
209	90	2.31111	485.333
213	280	0.757143	162.029
214	72	2.95833	636.042
215	440	0.486364	105.055
217	240	0.9	196.2
218	108	2.00926	440.028
219	296	0.736486	162.027
221	252	0.873016	193.81
226	228	0.986842	224.013

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
235	160	1.4625	345.15
237	312	0.75641	180.026
247	252	0.97619	242.095
249	168	1.47619	369.048
253	240	1.05	266.7
254	768	0.329427	84.0039
259	304	0.848684	220.658
262	390	0.669231	176.008
265	540	0.488889	130.044
267	88	3.02273	810.091
274	276	0.98913	272.011
278	138	2.00725	560.022
287	80	3.575	1029.6
291	392	0.739796	216.02
295	580	0.506897	150.041
298	444	0.668919	200.007
299	336	0.886905	266.071
301	176	1.70455	514.773
302	150	2.00667	608.02
303	200	1.51	459.04
305	60	5.06667	1550.4
309	208	1.48077	459.038
314	948	0.330169	104.003
319	70	4.54286	1453.71
321	72	4.44444	1431.11
323	36	8.94444	2898
326	984	0.330285	108.003
327	216	1.50926	495.037
329	32	10.25	3382.5
334	336	0.991071	332.009
335	680	0.491176	165.035
339	152	2.22368	756.053
341	30	11.3333	3876
346	348	0.991379	344.009
355	140	2.52857	900.171
358	534	0.668539	240.006

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
362	90	4.01111	1456.03
365	740	0.491892	180.032
371	432	0.856481	318.611
377	28	13.4286	5076
381	256	1.48438	567.031
382	570	0.668421	256.005
386	1164	0.330756	128.003
391	144	2.70833	1061.67
393	520	0.753846	297.015
394	396	0.992424	392.008
395	780	0.505128	200.031
398	66	6.01515	2400.05
403	420	0.957143	386.686
407	380	1.06842	435.916
411	552	0.742754	306.014
413	464	0.887931	367.603
415	840	0.492857	205.029
417	184	2.26087	945.043
422	42	10.0238	4240.07
427	240	1.775	759.7
437	144	3.02778	1326.17
445	220	2.01818	900.109
446	1344	0.331101	148.002
447	296	1.50676	675.027
451	40	11.25	5085
453	200	2.26	1026.04
454	456	0.993421	452.007
458	114	4.00877	1840.03
466	156	2.98077	1392.02
469	272	1.72059	808.676
471	632	0.743671	351.013
473	440	1.07273	508.473
478	714	0.668067	320.004
481	532	0.902256	434.887
482	240	2.00417	968.013
485	980	0.493878	240.024

括弧内の数値は標準誤差を表している.

表 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
489	328	1.4878	729.024
493	252	1.95238	964.476
497	560	0.885714	441.086

括弧内の数値は標準誤差を表している.

4　考察・これからの課題

結果より素数の周期は

⊠ $T^2 - T - 1 = 0(\mathrm{mod} P)$ の解が異なる 2 解の場合、周期は $P - 1$ の約数である。
ex) 素数の値が 11 のとき、$(P - 1/n) = 1$ となっているので周期は 10 となる。

⊠ $T^2 - T - 1 = 0(\mathrm{mod} P)$ の解がない場合、周期は $P - 1$ の約数でない。
ex) 素数の値が 17 のとき、$(P - 1)/n = 0.444\cdots$ となっているので、
約数になっていない。
ここで $(P^2 - 1)/n$ に注目する。すると $(P^2 - 1)/n = 8$ となり、約数になっている。
周期は $2(17 + 1) = 36$ で求めることが出来た。
つまり周期は $P^2 - 1$ の約数であるとわかる。また、その周期の値は $2(P + 1)$ になる。

⊠ $T^2 - T - 1 = 0(\mathrm{mod} P)$ の解が重根の場合
⊠、⊠にも当てはまらない素数が存在する。
ex) 素数の値が 5 のとき $(P - 1)/n = 0.2$、また $(P^2 - 1)/n = 1.2$ となりどちらにも当て
はまらないということになる。この素数のみ例外となる。周期は 20 となる。
ただ、周期の出し方はまだわからない。そして素数の中にこのような数はない。
なぜこの 5 という素数だけが例外なのかというと、
$T^2 - T - 1 = 0(\mathrm{mod} P)$ を T について解くと重根になるからである。

素数×素数の周期は

ex) 素数の値がそれぞれ、3 と 13 のとき、素数×素数の値は 39 になる。
3 のときは周期が 8、13 のときは周期は 28、39 のときの周期は 56 である。
つまり、異なる 2 つの素数の周期の最小公倍数であるとわかる。
ただ、素数×素数は異なる素数の場合でしか行っていないので、同じ素数を掛けた
場合を調べていくのが、この先の研究課題となっている。

これからはまず上で述べた研究課題から調べていきたい。

5　証明

$a_1 = 1, a_2 = 1$ として $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ とする。

$$U_n \quad = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \quad U_n \\ &= A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} aa_n + ba_{n+1} \\ ca_n + da_{n+1} \end{pmatrix}$$

$a = 0, b = 1$

$c = 1, d = 1$　　　よって　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} U_n = A\ Un$$

つまり $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} U_2 &= AU_1 \\ U_3 &= AU_2 = A^2U_1 \\ &\vdots \\ U_n &= A^{n-1}U_1 \end{aligned}$$

固有多項式

$$\begin{aligned} TE - A &= \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T & -1 \\ -1 & T-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\det = T(T-1) - 1 = T^2 - T - 1$

すなわち D=5

$A^{n-1} \equiv E(\bmod P)$ を満たす最小の数 $n-1$ が周期となる。

$U_n \equiv EU_1 = U_1$
$A^n \equiv E(\bmod P), A^m \equiv E(\bmod Q)$ とすると、
$A^l \equiv E(\bmod PQ), l = LCM(n, m)$

(証明)
$d = GCD(n, m)$
$A^n = A^{n_1 d}, A^m = A^{m_1 d}$
$A^l = A^{nm}$
$= A^{nm_1 d} \equiv E$
$= A^{mn_1 d} \equiv E$

(証明終わり)