フィボナッチ数列の周期

堀 将太朗
学習院大学理学部数学科

Contents

1. 目的

この研究ではフィボナッチ数列でのPを法としたときの周期の関係性を探していく。そのなかで特に素数の場合に注目した。

2. 結果

結果をExcelにまとめた表が以下である。
＊素数の場合＊

Table 1: 素数の周期表

素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
2	3	0.333333	1
3	8	0.25	1
5	20	0.2	1.2
7	16	0.375	3
11	10	1	12
13	28	0.428571	6
17	36	0.444444	8
19	18	1	20
⋮	⋮	⋮	⋮
467	936	0.497863	233
479	478	1	480
487	976	0.497951	243
491	490	1	492

＊素数×素数の場合＊

Table 2: 素数×素数の周期表

素数×素数	n	$(p-1)/n$	$(pp-1)/n$
6	24	0.208333	1.45833
10	60	0.15	1.65
14	48	0.270833	4.0625
15	40	0.35	5.6
21	16	1.25	27.5
22	30	0.7	16.1
26	84	0.297619	8.03571
⋮	⋮	⋮	⋮
489	328	1.4878	729.024
493	252	1.95238	964.476
497	560	0.885714	441.086

括弧内の数値は標準誤差を表している.

3. 考察＆今後の課題

結果より素数の周期は

☒$T^2 - T - 1 = 0 \pmod{P}$の解が異なる2解の場合、周期は $P - 1$の約数である。

ex)素数の値が11のとき、$P - 1/n = 1$となっているので
周期は10となる。

☒$T^2 - T - 1 = 0 \pmod{P}$の解がない場合、周期は$P - 1$の約数でない。

ex)素数の値が17のとき、$P - 1/n = 0.4\ldots$となっているので、約数になっていない。
ここで$P^2 - 1/n$に注目する。
すると$(P^2 - 1/n) = 8$となり、約数になっている。
周期は$2(17 + 1) = 36$で求めることが出来た。

つまり周期は$P^2 - 1$の約数であるとわかる。
また、その周期の値は$2(P + 1)$になると証明されている。

☒どちらでもない場合

☒、☒にも当てはまらない素数が存在する。

ex)素数の値が5のとき$(P-1)/n=0.2$、$(P^2-1)/n=1.2$

となりどちらにも当てはまらないということになる。

の素数のみ例外となる。また、周期は20となる。

ただ、周期の出し方はまだわからない。

そして素数の中にこのような数はない。

なぜこの5という素数だけが例外なのかというと、

$T^2-T-1=0(\mathrm{mod}\,P)$はD＝5で重根になる

からである。

素数×素数の周期は

ex) 素数の値がそれぞれ、2と13のとき、

素数×素数の値は 26になる。

2のときは周期が3

13のときは周期は28

26のときの周期は84である。

つまり、異なる2つの素数の周期の最小公倍数
であるとわかる。
ただ、素数×素数は異なる素数の場合でしか
行っていないので、同じ素数を掛けた場合を
調べていくのが、この先の研究課題となっている。

これからはまず上で述べた研究課題から調べていきたい。

4. 証明

$a_1 = 1, a_2 = 1$として$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$とする。

$$
\begin{aligned}
U_n \quad &= \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
U_{n+1} &= A \quad U_n \\
&= A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} aa_n + ba_{n+1} \\ ca_n + da_{n+1} \end{pmatrix}
$$

$a=0, b=1$
$c=1, d=1$
よって　$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$U_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}U_n=A\,Un$

つまり $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}U_2&=AU_1\\U_3&=AU_2=A^2U_1\\&\vdots\\U_n&=A^{n-1}U_1\end{aligned}$$

固有多項式

$$
\begin{aligned}
TE - A &= \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T & -1 \\ -1 & T-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{det} = T(T-1) - 1 = T^2 - T - 1$$

すなわち D=5

$A^{n-1} \equiv E(\mathrm{mod} P)$を満たす最小の数$n-1$が周期となる。

$U_n \equiv EU_1 = U_1$
$A^n \equiv E(\mathrm{mod} P), A^m \equiv E(\mathrm{mod} Q)$とすると、
$A^l \ \equiv E(\mathrm{mod} PQ), l = LCM(n, m)$
(証明)
$d = GCD(n, m)$
$A^n = A^{n_1 d}, A^m = A^{m_1 d}$
$A^l \ = A^{nm}$
$\quad = A^{nm_1 d} \equiv E$
$\quad = A^{mn_1 d} \equiv E$
(証明終わり)