高次元フィボナッチ数列の周期について

久保田 匡志
学習院大学 数学科

平成 25 年 1 月 31 日

目 次

1 目的

次の規則にしたがって村民の人口の変化を調べる。
その規則は以下のようなものである。

1. 子、大人、親父、老人に人を分ける村があるとする。
2. 子が一年後に大人になる。
3. 大人は一年後に親父になる。
4. 親父は一年後に老人になる。
5. このとき、大人→親父、親父→老人になるときに 1 人子を産む。
6. 老人は死なない。
7. 1 年目の村は子 1 人だけである。

n 年後の子の数を a_n、大人の数を b_n、親父の数を c_n、老人の数を d_n、村人の総数を e_n とするとかくしてできた数列はフィボナッチ数列の高次元版と考えられる。
数列は次ような表になる。

表 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	0	2
4	1	1	0	1	3
5	1	1	1	1	4
6	2	1	1	2	6
7	2	2	1	3	8
8	3	2	2	4	11
9	4	3	2	6	15
10	5	4	3	8	20
11	7	5	4	11	27
12	9	7	5	15	36
13	12	9	7	20	48
14	16	12	9	27	64
15	21	16	12	36	85
16	28	21	16	48	113
17	37	28	21	64	150
18	49	37	28	85	199
19	65	49	37	113	264
20	86	65	49	150	350
21	114	86	65	199	464
22	151	114	86	264	615
23	200	151	114	350	815
24	265	200	151	464	1080
25	351	265	200	615	1431
26	465	351	265	815	1896
27	616	465	351	1080	2512
28	816	616	465	1431	3328
29	1081	816	616	1896	4409
30	1432	1081	816	2512	5841
31	1897	1432	1081	3328	7738
32	2513	1897	1432	4409	10251
33	3329	2513	1897	5841	13580
34	4410	3329	2513	7738	17990

表 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
35	5842	4410	3329	10251	23832
36	7739	5842	4410	13580	31571
37	10252	7739	5842	17990	41823
38	13581	10252	7739	23832	55404
39	17991	13581	10252	31571	73395
40	23833	17991	13581	41823	97228
41	31572	23833	17991	55404	128800
42	41824	31572	23833	73395	170624
43	55405	41824	31572	97228	226029
44	73396	55405	41824	128800	299425
45	97229	73396	55405	170624	396654
46	128801	97229	73396	226029	525455
47	170625	128801	97229	299425	696080
48	226030	170625	128801	396654	922110
49	299426	226030	170625	525455	1221536
50	396655	299426	226030	696080	1618191

これらすべての数列の性質を素数 P を法として研究する。
このとき、この数列は周期性を持つ。特に周期を詳しく研究する。

2　方法

2.1　特性方程式と漸化式の決定

先の規則によれば、次の事項が成立する。

1. 次の年の子の数は、その年の大人と親父の数の和である。
2. 次の年の大人の数は、その年の子の数である。
3. 次の年の親父の数は、その年の大人の数である。
4. 次の年の老人の数は、その年の老人と親父の数の和である。

これを数列で表わすと

1. $a_{n+1} = b_n + c_n$
2. $b_{n+1} = a_n$
3. $c_{n+1} = b_n$
4. $d_{n+1} = d_n + c_n$

また、村民の総和は
$e_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1}$
であり、表から　$e_{n+1} = d_{n+4}$　と表わせる。
a_n, b_n, c_n, d_n をまとめてベクトル $\overrightarrow{u}$ とみなす。
すなわち、$\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\overrightarrow{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とするとこの関係式から
$\overrightarrow{u}_{n+1} = A\overrightarrow{u}_n$

よって $\overrightarrow{u}_2 = A\overrightarrow{u}_1$
$\overrightarrow{u}_3 = A\overrightarrow{u}_2 = A^2\overrightarrow{u}_1$
$\vdots$
$\overrightarrow{u}_n = A^{n-1}\overrightarrow{u}_1$
と表せる。
　A についての固有多項式を求めるために $tE - A$ の行列式を計算する。

$$tE - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1+t \end{bmatrix}$$

　その行列式は
$(t^3 - t - 1)(t - 1)$
$t^4 - t^3 - t^2 + 1$
ここで t に A を代入するとケーリーハミルトンの定理によって
$A^4 - A^3 - A^2 + E = 0$
この式に右から $A^{n-4}\overrightarrow{u}_1$ をかけると
$A^n\overrightarrow{u}_1 - A^{n-1}\overrightarrow{u}_1 - A^{n-2}\overrightarrow{u}_1 + A^{n-4}\overrightarrow{u}_1$=0
$\overrightarrow{u}_{n+1} = \overrightarrow{u}_n + \overrightarrow{u}_{n-1} - \overrightarrow{u}_{n-3}$
よって

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \\ c_{n-3} \\ d_{n-3} \end{bmatrix}$$

　ただし初期値

$$\overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

　$e_n = d_{n+3}$ より
この漸化式は e_n にもあてはまることがわかる。
以上より $e_{n+4} = e_{n+3} + e_{n+2} - e_n$

2.2 素数 P を法としたときの数列

この e_n 求めるプログラムは

```
arare(1,1,1,2,3):- !.
arare(2,1,2,3,4):- !.
arare(3,2,3,4,6):- !.
arare(4,3,4,6,8):- !.
arare(5,4,6,8,11):- !.
arare(N,F1,F2,F3,F4):-N>5,N1 is N-1,
arare(N1,F0,F1,F2,F3),
write(arare=[N1,F0,F1,F2,F3]),nl,
F4 is (F3 + F2 - F0) .
```

mod$P$ としたときのプログラムは

```
arare(1,1,1,2,3,P):- !.
arare(2,1,2,3,4,P):- !.
arare(3,2,3,4,6,P):- !.
arare(4,3,4,6,8,P):- !.
arare(5,4,6,8,11,P):- !.
arare(N,F1,F2,F3,F4,P):-N>5,N1 is N-1,
arare(N1,F0,F1,F2,F3,P),
write(arare=[N1,F0,F1,F2,F3]),nl,
F4 is (F3 + F2 - F0) mod  P.
```

e_n 数列に対しての特性方程式を mod$P$ で解くと
$x^4 - x^3 - x^2 + 1 \equiv 0 \bmod P$
これを判定するプログラムが

```
sito(P,X):- P1 is P-1,!,kuririn(P),
for(0=< P1,X),K is (X*X*X*X-X*X*X-X*X+1) mod  P,K==0.
    sito(P,X).

    kuririn(P):-factorize(P,F),F=[Q].
```

最終的に mod$P$ での e_n の周期、またそのときの解が知りたい。

2.3 周期

素数 P を法としたときの周期を求めるプログラム

```
for(I =<J,I) :- I=<J.
for(I =<J,K) :- I=<J,
I1 is I+1,for(I1 =<J,K).


yamcya(N,F0,F1,F2,F3,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
(C1<W->(F4 is (F3+F2-F0) mod  P,([F1,F2,F3,F4]=[0,1,1,2]->
     write(N1),put(9)
;   yamcya(N1,F1,F2,F3,F4,P,C1<W)
  ));true).

gokuu(K):- for(5=<K,P),kuririn(P),
nl,
write(P),put(9),
yamcya(1,1,1,2,3,P,0<100000000),fail.
gokuu(K).
```

周期が p^4-1、または、その約数になるものを探すプログラム

```
baisu(A,B):- C is A mod B,(C==0->write(ok)).

yamcya2(N,F0,F1,F2,F3,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
    P1 is P*P*P*P-1,
(C1<W->(F4 is (F3+F2-F0) mod P,([F1,F2,F3,F4]=[0,1,1,2]->
baisu(P1,N1),put(9)
;   yamcya2(N1,F1,F2,F3,F4,P,C1<W)
      ));true).

gokuu2(K):- for(5=<K,P),kuririn(P),
nl,
write(P),put(9),
yamcya2(1,1,1,2,3,P,0<100000000),fail.
gokuu2(K).
```

周期が p^3-1、または、その約数になるものを探すプログラム

```
yamcya3(N,F0,F1,F2,F3,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
    P2 is P*P*P-1,
(C1<W->(F4 is (F3+F2-F0) mod P,([F1,F2,F3,F4]=[0,1,1,2]->
baisu(P2,N1),put(9)
;   yamcya3(N1,F1,F2,F3,F4,P,C1<W)
       ));true).

gokuu3(K):- for(5=<K,P),kuririn(P),
nl,
write(P),put(9),
yamcya3(1,1,1,2,3,P,0<100000000),fail.
gokuu3(K).
```

周期が p^2-1、または、その約数になるものを探すプログラム

```
yamcya4(N,F0,F1,F2,F3,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
    P2 is P*P-1,
(C1<W->(F4 is (F3+F2-F0) mod P,([F1,F2,F3,F4]=[0,1,1,2]->
baisu(P3,N1),put(9)
;   yamcya4(N1,F1,F2,F3,F4,P,C1<W)
       ));true).

gokuu4(K):- for(5=<K,P),kuririn(P),
nl,
write(P),put(9),
yamcya4(1,1,1,2,3,P,0<100000000),fail.
gokuu4(K).
```

周期が $p-1$、または、その約数になるものを探すプログラム

```
yamcya5(N,F0,F1,F2,F3,P,C<W):- N1 is N+1,C1 is C+1,
    P4 is P-1,
(C1<W->(F4 is (F3+F2-F0) mod P,([F1,F2,F3,F4]=[0,1,1,2]->
baisu(P4,N1),put(9)
;   yamcya5(N1,F1,F2,F3,F4,P,C1<W)
       ));true).
```

```
gokuu5(K):- for(5=<K,P),kuririn(P),
nl,
write(P),put(9),
yamcya5(1,1,1,2,3,P,0<100000000),fail.
gokuu5(K).
```

特性方程式 $x^4 - x^3 - x^2 + 1 \equiv\ 0 \bmod P$ で考える。
解があるのか、また、重解があるか調べる。

その素数に対しての解を求めるプログラム

```
inu(N):-for(3=<N,M),
sito(M,X),write(M=X),nl,fail.
inu(N).
```

これらを表にまとめたものが結果である。

3 結果

表 2: e_n を mod$P$ としたときの周期とその解

mod$P$	周期	$(p^4-1)/n$	$(p^3-1)/n$	$(p^2-1)/n$	$(p-1)/n$	解
5	24	Z	non	Z	non	2
7	48	Z	non	Z	non	5
11	120	Z	non	Z	non	6
13	183	non	Z	non	non	non
17	288	Z	non	Z	non	5
19	180	Z	non	Z	non	6
23	506	non	non	non	non	3,10,10
29	871	non	Z	non	non	non
31	993	non	Z	non	non	non
37	1368	Z	non	Z	non	13
41	1723	non	Z	non	non	non
43	231	Z	non	Z	non	10
47	2257	non	Z	non	non	non
53	1404	Z	non	Z	non	37
59	58	Z	Z	Z	Z	4,13,42
61	930	Z	non	Z	non	57
67	4488	Z	non	Z	non	7
71	5113	non	Z	non	non	non
73	5403	non	Z	non	non	non
79	3120	Z	non	Z	non	20
83	2296	Z	non	Z	non	66
89	3960	Z	non	Z	non	17
97	3136	Z	non	Z	non	51
101	100	Z	Z	Z	Z	20,89,93
103	3536	Z	non	Z	non	94
107	2862	Z	non	Z	non	34
109	1485	Z	non	Z	non	26
113	4256	Z	non	Z	non	54
127	16257	non	Z	non	non	non
131	17293	non	Z	non	non	non
137	391	Z	non	Z	non	73
139	19461	non	Z	non	non	non
149	925	Z	non	Z	non	30
151	1093	non	Z	non	non	non
157	12324	Z	non	Z	non	110

周期は割り切れていれば Z

割り切れていなければ non とかく。

表 2: e_n を mod$P$ としたときの周期とその解

mod$P$	周期	$(p^4-1)/n$	$(p^3-1)/n$	$(p^2-1)/n$	$(p-1)/n$	解
163	8911	non	Z	non	non	non
167	166	Z	Z	Z	Z	73.127.134
173	172	Z	Z	Z	Z	97.110.139
179	32221	non	Z	non	non	non
181	10920	Z	non	Z	non	30
191	7296	Z	non	Z	non	37
193	37443	non	Z	non	non	non
197	39007	non	Z	non	non	non
199	39600	Z	non	Z	non	54
211	210	Z	Z	Z	Z	97.120.205
223	111	Z	Z	Z	Z	33.63.127
227	51528	Z	non	Z	non	193
229	2185	Z	non	Z	non	43
233	54523	non	Z	non	non	non
239	57361	non	Z	non	non	non
241	58080	Z	non	Z	non	84
251	63000	Z	non	Z	non	42
257	66307	non	Z	non	non	non
263	34584	Z	non	Z	non	144
269	72631	non	Z	non	non	non
271	270	Z	Z	Z	Z	46.80.145
277	77007	non	Z	non	non	non
281	11280	Z	non	Z	non	129
283	80088	Z	non	Z	non	166
293	6132	Z	non	Z	non	233
307	306	Z	Z	Z	Z	50.100.157
311	97033	non	Z	non	non	non
313	16328	Z	non	Z	non	114
317	316	Z	Z	Z	Z	39.132.146
331	109893	non	Z	non	non	non
337	18928	Z	non	Z	non	330
347	173	Z	Z	Z	Z	43.324.327
349	122151	non	Z	non	non	non
353	124963	non	Z	non	non	non
359	12888	Z	non	Z	non	46
367	134688	Z	non	Z	non	34
373	139128	Z	non	Z	non	349

周期は割り切れていれば Z

割り切れていなければ non とかく。

表 2: e_n を $\mathrm{mod} P$ としたときの周期とその解

$\mathrm{mod} P$	周期	$(p^4-1)/n$	$(p^3-1)/n$	$(p^2-1)/n$	$(p-1)/n$	解
379	71820	Z	non	Z	non	305
383	18336	Z	non	Z	non	343
389	75660	Z	non	Z	non	322
397	52669	non	Z	non	non	non
401	160800	Z	non	Z	non	91
409	55897	non	Z	non	non	non
419	87780	Z	non	Z	non	363
421	59080	Z	non	Z	non	61
431	92880	Z	non	Z	non	120
433	187488	Z	non	Z	non	124
439	193161	non	Z	non	non	non
443	196693	non	Z	non	non	non
449	224	Z	Z	Z	Z	456.194.199
457	208848	Z	non	Z	non	339
461	212983	non	Z	non	non	non
463	231	Z	Z	Z	Z	133.265.153
467	12116	Z	non	Z	non	153
479	229440	Z	non	Z	non	281
487	237657	non	Z	non	non	non
491	241573	non	Z	non	non	non
499	249501	non	Z	non	non	non
503	126504	Z	non	Z	non	8
509	259591	non	Z	non	non	non
521	45240	Z	non	Z	non	393
523	91176	Z	non	Z	non	154
541	97741	non	Z	non	non	non
547	99919	non	Z	non	non	non
557	17236	Z	non	Z	non	323
563	39621	Z	non	Z	non	325
569	323760	Z	non	Z	non	459
571	326040	Z	non	Z	non	234
577	333507	non	Z	non	non	non
587	345157	non	Z	non	non	non
593	592	Z	Z	Z	Z	47.65.481
599	598	Z	Z	Z	Z	323.348.527
601	120601	non	Z	non	non	non
607	606	Z	Z	Z	Z	57.263.287

周期は割り切れていれば Z

割り切れていなければ non とかく。

表 2: e_n を mod$P$ としたときの周期とその解

mod$P$	周期	$(p^4-1)/n$	$(p^3-1)/n$	$(p^2-1)/n$	$(p-1)/n$	解
613	375768	Z	non	Z	non	396
617	63448	Z	non	Z	non	78
619	63860	Z	non	Z	non	222
631	66360	Z	non	Z	non	179
641	68480	Z	non	Z	non	88
643	413448	Z	non	Z	non	578
647	419257	non	Z	non	non	non
653	427063	non	Z	non	non	non
659	434280	Z	non	Z	non	392
661	109230	Z	non	Z	non	614
673	151201	non	Z	non	non	non
677	114582	Z	non	Z	non	85
683	467173	non	Z	non	non	non
691	690	Z	Z	Z	Z	354.380.648
701	491400	Z	non	Z	non	346
709	167560	Z	non	Z	non	585
719	718	Z	Z	Z	Z	9.109.601
727	528528	Z	non	Z	non	654
733	179096	Z	non	Z	non	94
739	78123	non	Z	non	non	non
743	552048	Z	non	Z	non	306
751	94000	Z	non	Z	non	304
757	573048	Z	non	Z	non	333
761	579883	non	Z	non	non	non
769	591360	Z	non	Z	non	78
773	298764	Z	non	Z	non	706
787	309684	Z	non	Z	non	306
797	105868	Z	non	Z	non	571
809	808	Z	Z	Z	Z	90.335.384
811	219511	non	Z	non	non	non
821	820	Z	Z	Z	Z	25.298.498
823	226051	non	Z	non	non	non
827	341964	Z	non	Z	non	676
829	828	Z	Z	Z	Z	82.218.529
839	100560	Z	non	Z	non	297
853	852	Z	Z	Z	Z	472.486.748
857	735307	non	Z	non	non	non

周期は割り切れていれば Z

割り切れていなければ non とかく。

表 2: e_n を mod$P$ としたときの周期とその解

mod$P$	周期	$(p^4-1)/n$	$(p^3-1)/n$	$(p^2-1)/n$	$(p-1)/n$	解
859	246247	non	Z	non	non	non
863	745633	non	Z	non	non	non
877	876	Z	Z	Z	Z	257.648.849
881	155232	Z	non	Z	non	491
883	882	Z	Z	Z	Z	487.592.687
887	787657	non	Z	non	non	non
907	205662	Z	non	Z	non	85
911	1729	Z	non	Z	non	745
919	844560	Z	non	Z	non	101
929	863971	non	Z	non	non	non
937	97552	Z	non	Z	non	309
941	885480	Z	non	Z	non	231
947	897757	non	Z	non	non	non
953	454104	Z	non	Z	non	742
967	312019	non	Z	non	non	non
971	235710	Z	non	Z	non	264
977	318176	Z	non	Z	non	19
983	120786	Z	non	Z	non	774
991	990	Z	Z	Z	Z	216.785.981
997	996	Z	Z	Z	Z	89.946.959

周期は割り切れていれば Z

割り切れていなければ non とかく。

4　考察

　この数列の漸化式を求める際、
$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ は、$\{a_n\}$ を平行移動して得られる。
$\{d_n\}$ は、$\{e_n\}$ を平行移動して得られる。
しかし、両者は共通の漸化式を持っていることがわかった。

従って、各数列は初期値 $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_4$ によって特徴づけられることがわかった。

解がない場合は周期が p^3-1 かその約数になる。
解が 1 つの場合は p^2-1 かその約数になる。
解が 3 つの場合は $p-1$ かその約数になる。

しかし、23 のときは周期が p^3-1 にならない、この場合は $(p^2-1)\times p$ の約数であり、重解として 10 を持つことがわかった。

5　今後の課題

　また、2000 までの素数の場合を行ったが、それ以上の素数を扱ったときほかにも重解をもつ数があるのか。
その解の値に何か規則性があるのか。ということをこれから調べたい。

6　感想

　フィボナッチは数列のなかでは、とても有名な数列なので考えやすかった。
高校数学の内容でも十分に理解できる内容のため、多くの人に理解してもらえる内容だったと思う。
ただ、最初の村の規則を変えることで更に高次元フィボナッチもつくることができるため、これから先をやってみたい。
今回は、一年後に成長するという規則で作ったが、大人→親父の部分を二年後に変化させたときどのような結果になるのかをやりたい。