高次元フィボナッチ数列の周期について

久保田 匡志
学習院大学 数学科

Contents

1. 目的

　次の規則にしたがって村民の人口の変化を調べる。
その規則は次のようなものである。

(1) 子、大人、親父、老人に人を分ける村があるとする。
(2) 子が一年後に大人になる。
(3) 大人は一年後に親父になる。
(4) 親父は一年後に老人になる。
(5) このとき、大人→親父、親父→老人になるときに１人子を産む。
(6) 老人は死なない。
(7) １年目の村は子１人だけである。

n 年後の子の数を a_n、大人の数を b_n、親父の数を c_n, 老人の数を d_n、村人の総数を e_n とすると

かくしてできた数列はフィボナッチ数列の高次元版と考えられる。

数列は次ような表になる。

Table 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	0	2
4	1	1	0	1	3
5	1	1	1	1	4
6	2	1	1	2	6
7	2	2	1	3	8
8	3	2	2	4	11
9	4	3	2	6	15
10	5	4	3	8	20
11	7	5	4	11	27
12	9	7	5	15	36
13	12	9	7	20	48
14	16	12	9	27	64
15	21	16	12	36	85

Table 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
16	28	21	16	48	113
17	37	28	21	64	150
18	49	37	28	85	199
19	65	49	37	113	264
20	86	65	49	150	350
21	114	86	65	199	464
22	151	114	86	264	615
23	200	151	114	350	815
24	265	200	151	464	1080
25	351	265	200	615	1431
26	465	351	265	815	1896
27	616	465	351	1080	2512
28	816	616	465	1431	3328
29	1081	816	616	1896	4409
30	1432	1081	816	2512	5841

Table 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
31	1897	1432	1081	3328	7738
32	2513	1897	1432	4409	10251
33	3329	2513	1897	5841	13580
34	4410	3329	2513	7738	17990
35	5842	4410	3329	10251	23832
36	7739	5842	4410	13580	31571
37	10252	7739	5842	17990	41823
38	13581	10252	7739	23832	55404
39	17991	13581	10252	31571	73395
40	23833	17991	13581	41823	97228
41	31572	23833	17991	55404	128800
42	41824	31572	23833	73395	170624
43	55405	41824	31572	97228	226029
44	73396	55405	41824	128800	299425
45	97229	73396	55405	170624	396654

Table 1: 村の人数の動きとその総数

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
46	128801	97229	73396	226029	525455
47	170625	128801	97229	299425	696080
48	226030	170625	128801	396654	922110
49	299426	226030	170625	525455	1221536
50	396655	299426	226030	696080	1618191
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

これらすべての数列の性質を素数Pを法として研究する。
このとき、この数列は周期性を持つ。
特に周期を詳しく研究する。

2. 方法

先の規則によれば、次の事項が成立する。

(1) 次の年の子の数はその年の大人と親父の数の和である。
(2) 次の年の大人の数はその年の子の数である。
(3) 次の年の親父の数はその年の大人の数である。
(4) 次の年の老人の数はその年の老人と親父の数の和である。

これを数列で表わすと

(1) $a_{n+1} = b_n + c_n$
(2) $b_{n+1} = a_n$
(3) $c_{n+1} = b_n$
(4) $d_{n+1} = d_n + c_n$

　また、村民の総和は

$e_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1}$

であり、表から　$e_{n+1} = d_{n+4}$　と表わせる。

　a_n, b_n, c_n, d_n をまとめてベクトル $\overrightarrow{u}$ とみなす。

すなわち

$$\overrightarrow{u}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

とおく。

次の漸化式が成立する。(5節で証明する)

$e_{n+4} = e_{n+3} + e_{n+2} - e_n$

特性方程式 $\boxed{x^4 - x^3 - x^2 + 1 \equiv 0 \mod P}$ で考える。
解があるのか、また、重解があるか調べる。
これらを、表にまとめた。

3. 結果

Table 2: e_n を $\mathrm{mod}P$ としたときの周期 m とその解.(周期は割り切れていれば Z 割り切れていなければnonとかく)

$\mathrm{mod}P$	周期	$(p^4-1)/m$	$(p^3-1)/m$	$(p^2-1)/m$	$(p-1)/m$	解
5	24	Z	non	Z	non	2
7	48	Z	non	Z	non	5
11	120	Z	non	Z	non	6
13	183	non	Z	non	non	non
17	288	Z	non	Z	non	5
19	180	Z	non	Z	non	6
23	506	non	non	non	non	3,10,10
29	871	non	Z	non	non	non
31	993	non	Z	non	non	non
37	1368	Z	non	Z	non	13
41	1723	non	Z	non	non	non

Table 2: e_n を mod$P$ としたときの周期 m とその解.(周期は割り切れていれば Z 割り切れていなければ non とかく)

mod$P$	周期	$(p^4-1)/m$	$(p^3-1)/m$	$(p^2-1)/m$	$(p-1)/m$	解
43	231	Z	non	Z	non	10
47	2257	non	Z	non	non	non
53	1404	Z	non	Z	non	37
59	58	Z	Z	Z	Z	4,13,42
61	930	Z	non	Z	non	57
67	4488	Z	non	Z	non	7
71	5113	non	Z	non	non	non
73	5403	non	Z	non	non	non
79	3120	Z	non	Z	non	20
83	2296	Z	non	Z	non	66
89	3960	Z	non	Z	non	17
97	3136	Z	non	Z	non	51
101	100	Z	Z	Z	Z	20,89,93

Table 2: e_n を mod$P$ としたときの周期mとその解.(周期は割り切れていればZ割り切れていなければnonとかく)

mod$P$	周期	$(p^4-1)/m$	$(p^3-1)/m$	$(p^2-1)/m$	$(p-1)/m$	解
103	3536	Z	non	Z	non	94
107	2862	Z	non	Z	non	34
109	1485	Z	non	Z	non	26
113	4256	Z	non	Z	non	54
127	16257	non	Z	non	non	non
131	17293	non	Z	non	non	non
137	391	Z	non	Z	non	73
139	19461	non	Z	non	non	non
149	925	Z	non	Z	non	30
151	1093	non	Z	non	non	non
157	12324	Z	non	Z	non	110
163	8911	non	Z	non	non	non
167	166	Z	Z	Z	Z	73.127.134

Table 2: e_n を mod$P$ としたときの周期mとその解.(周期は割り切れていればZ割り切れていなければnonとかく)

mod$P$	周期	$(p^4-1)/m$	$(p^3-1)/m$	$(p^2-1)/m$	$(p-1)/m$	解
173	172	Z	Z	Z	Z	97.110.139
179	32221	non	Z	non	non	non
181	10920	Z	non	Z	non	30
191	7296	Z	non	Z	non	37
193	37443	non	Z	non	non	non
197	39007	non	Z	non	non	non
199	39600	Z	non	Z	non	54
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

4. 考察

　この数列の漸化式を求める際、
$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ は、$\{a_n\}$ を平行移動して得られる。
$\{d_n\}$ は、$\{e_n\}$ を平行移動して得られる。
しかし、両者は共通の漸化式を持っていることがわかった。

従って、各数列は初期値によって特徴づけられることがわかる。

Pを法とする特性方程式の解に関して

解がない場合は周期がp^3-1かその約数になる。
解が1つの場合はp^2-1かその約数になる。
解が3つの場合は$p-1$かその約数になる。

しかし、23のときは周期がp^3-1にならない、この場合は$(p^2-1)\times p$の約数であり、重解として10を持つことがわかった。

5. 漸化式の証明

$$\overrightarrow{u}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\overrightarrow{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$$

ここで

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

とすると、関係式から

$\overrightarrow{u}_{n+1}=A\overrightarrow{u}_n$　よって

$\overrightarrow{u}_2=A\overrightarrow{u}_1$

$\overrightarrow{u}_3=A\overrightarrow{u}_2=A^2\overrightarrow{u}_1$

$\vdots$

$\overrightarrow{u}_n=A^{n-1}\overrightarrow{u}_1$ と表せる。

Aについての固有多項式を求めるために$tE-A$の行列式を計算する。

$$tE-\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t&-1&-1&0\\-1&t&0&0\\0&-1&t&0\\0&0&-1&-1+t\end{bmatrix}$$

その行列式は

$(t^3-t-1)(t-1)$

よって$t^4-t^3-t^2+1$

ここでtにAを代入するとケーリーハミルトンの定理によって

$A^4-A^3-A^2+E=0$

この式に右から$A^{n-4}\overrightarrow{u}_1$をかけると

$$A^n\overrightarrow{u}_1 - A^{n-1}\overrightarrow{u}_1 - A^{n-2}\overrightarrow{u}_1 + A^{n-4}\overrightarrow{u}_1=0$$

$$\overrightarrow{u}_{n+1} = \overrightarrow{u}_n + \overrightarrow{u}_{n-1} - \overrightarrow{u}_{n-3}$$

成分を表示すると

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \\ c_{n-3} \\ d_{n-3} \end{bmatrix}$$

ただし初期値

$$\overrightarrow{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

また、$e_{n+1} = d_{n+4}$ より
この漸化式は $\{e_n\}$ にもあてはまることがわかる。

よって $e_{n+4} = e_{n+3} + e_{n+2} - e_n$

証明終わり