$n^r!$ の指数について

黒沼壮太
学習院大学理学部数学科

2013 年 2 月 2 日

目 次

1 目的 **1**

2 方法 **1**

3 結果 **4**

4 考察 **9**

1 目的

ここでは $n^r!$ に含まれる素数 p の指数を求め，その結果から一定の規則性を考察する研究を目的とする．

2 方法

2.0【はじめに】

まず，$n!$ を積の形に展開すると，

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

この $n!$ の中に素数 p が $E_p(n)$ 個含まれるとき，

$$n! = p^{E_p(n)} \cdot \cdots$$

と表すことができる．
このとき，次のことが言える．

$$n_1 = n//p$$

$$E_p(n) = E_p(n_1) + n_1$$

2.1【$p^r!$ に含まれる p の個数を求める】

先に記した

$$n_1 = n//p$$

$$E_p(n) = E_p(n_1) + n_1$$

を利用し，商が 0 になるまで繰り返し試行することで得られる．

例.

$$E_2(2^3) = E_2(4) + 4 = E_2(2) + 2 + 4 = E_2(1) + 1 + 6 = 7$$

プログラムを利用し，p=2,3,5,7,11 に対し，それぞれ $1 \leq r \leq 15$ の範囲でデータをとり，規則性を調べる．

```
f(N,P,0):-N<P.
f(N,P,E):-N1 is floor(N//P),
    f(N1,P,E1),
    E is E1 +N1.

power(P,R,W):-power_a(P,R,W).

power_a(P,1,P).
power_a(P,N,W):- N1 is N-1,
    power_a(P,N1,W1),
    W is W1 \cdot P.

sisu(P,R,E):-power(P,R,PR),
    f(PR,P,E),!.

sisur(P,R):-for(1=<R,R0),
    write(r=R0),nl,
    sisu(P,R0,E),
    write(E),nl,
    fail.
sisur(P,R).

for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
    I1 is I+1,for(I1=<J,K).

sisu1(Q,P,R,E):-power(P,R,PR),A=Q*PR,B is A,
    f(B,P,E),!.
```

```
sisur1(Q,P,R):-for(1=<R,R1),
    write(r=R1),nl,
    sisu1(Q,P,R1,E),
    write(E),nl,
    fail.
sisur1(Q,P,R).
```

2.2【$qp^r!$ に含まれる **p** の個数を求める】

2.1 と同様に，商が 0 になるまで $E_p(qp^r)$ の試行を繰り返す．

例．p=2,q=3,r=2

$$E_2(3 \cdot 2^2) = E_2(6) + 6 = E_2(3) + 3 + 6 = E_2(1) + 1 + 9 = 10$$

プログラムを利用し，$p, q = 2, 3, 5, 7, 11$ に対し，
$1 \leq r \leq 15$ の範囲でデータをとり，規則性を調べる．

```
sisu2(Q,P,R,E):-power(P,R,PR),power(Q,R,QR),A=QR*PR,B is A,
    f(B,P,E),!.

sisur2(Q,P,R):-for(1=<R,R2),
    write(r=R2),nl,
    sisu2(Q,P,R2,E),
    write(E),nl,
    fail.
sisur2(Q,P,R).
```

2.3 【$(qp)^r!$ に含まれる p の個数を求める】

2.1,2.2 と同様に，商が 0 になるまで $E_p(qp)^r$ の試行を繰り返す．
$q^r = a$ とおくと，$E_p(qp)^r = E_p(ap^r)$ と表され，2.2 の結果が応用できる．

例．$r = 2, p = 5, q = 2^2$

$$E_5(10^2) = E_5(20) + 20 = E_5(4) + 24 = 24$$

プログラムを利用し，$p, q = 2, 3, 5, 7, 11$ に対し，
$1 \leq r \leq 15$ の範囲でデータをとり，規則性を調べる．

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).

list_sum(0=[]):-!.
list_sum(S=[A|List]):-list_sum(S1=List),
S is A + S1.

list_sum1(N,A,G):-num_list(N,L,G),
list_sum(A=L).

num_list(N,L,G):-N<G,L=[N],!.
num_list(N,L,G):-N1 is N//G,M is N mod G,
num_list(N1,L1,G),
append0(L=L1+[M]).

num_list1(P,L,A,G,R):-for(1=<R,R2),
write(r=R2),nl,
num_list(P^R,L,G),
list_sum1(P^R2,A,G),
write(L),nl,
write(A),nl,
fail.
num_list1(P,L,A,G,R).
```

3 結果

表 1: $p^r!$ に含まれる p の指数

	p=2	p=3	p=5	p=7	p=11
r=1	1	1	1	1	1
r=2	3	4	6	8	12
r=3	7	13	31	57	133
r=4	15	40	156	400	1464
r=5	31	121	781	2801	16105
r=6	63	364	3906	19608	177156
r=7	127	1093	19531	137257	1948717
r=8	255	3280	97656	960800	21435888
r=9	511	9841	488281	6725601	235794769
r=10	1023	29524	2441406	47079208	2593742460
r=11	2047	88573	12207031	329554457	28531167061
r=12	4095	265720	61035156	2306881200	313842837672
r=13	8191	797161	305175781	16148168401	3452271214393
r=14	16383	2391484	1525878906	113037178808	37974983358324
r=15	32767	7174453	7629394531	791260251657	417724816941565

表 2: $q \cdot 2^r!$ に含まれる 2 の指数

【p=2】	q=2	q=3	q=5	q=7	q=11
r=1	3	4	8	11	19
r=2	7	10	18	25	41
r=3	15	22	38	53	85
r=4	31	46	78	109	173
r=5	63	94	158	221	349
r=6	127	190	318	445	701
r=7	255	382	638	893	1405
r=8	511	766	1278	1789	2813
r=9	1023	1534	2558	3581	5629
r=10	2047	3070	5118	7165	11261
r=11	4095	6142	10238	14333	22525
r=12	8191	12286	20478	28669	45053
r=13	16383	24574	40958	57341	90109
r=14	32767	49150	81918	114685	180221
r=15	65535	98302	163838	229373	360445

表 3: $q \cdot 3^r!$ に含まれる 3 の指数

【p=3】	q=2	q=3	q=5	q=7	q=11
r=1	2	4	6	9	15
r=2	8	13	21	30	48
r=3	26	40	66	93	147
r=4	80	121	201	282	444
r=5	242	364	606	849	1335
r=6	728	1093	1821	2550	4008
r=7	2186	3280	5466	7653	12027
r=8	6560	9841	16401	22962	36084
r=9	19682	29524	49206	68889	108255
r=10	59048	88573	147621	206670	324768
r=11	177146	265720	442866	620013	974307
r=12	531440	797161	1328601	1860042	2922924
r=13	1594322	2391484	3985806	5580129	8768775
r=14	4782968	7174453	11957421	16740390	26306328
r=15	14348906	21523360	35872266	50221173	78918987

表 4: $q \cdot 5^r!$ に含まれる 5 の指数

【p=5】	q=2	q=3	q=5	q=7	q=11
r=1	2	3	6	8	13
r=2	12	18	31	43	68
r=3	62	93	156	218	343
r=4	312	468	781	1093	1718
r=5	1562	2343	3906	5468	8593
r=6	7812	11718	19531	27343	42968
r=7	39062	58593	97656	136718	214843
r=8	195312	292968	488281	683593	1074218
r=9	976562	1464843	2441406	3417968	5371093
r=10	4882812	7324218	12207031	17089843	26855468
r=11	24414062	36621093	61035156	85449218	134277343
r=12	122070312	183105468	305175781	427246093	671386718
r=13	610351562	915527343	1525878906	2136230468	3356933593
r=14	3051757812	4577636718	7629394531	10681152343	16784667968
r=15	15258789062	22888183593	38146972656	53405761718	83923339843

表 5: $q \cdot 7^r!$ に含まれる 7 の指数

【p=7】	q=2	q=3	q=5	q=7	q=11
r=1	2	3	5	8	12
r=2	16	24	40	57	89
r=3	114	171	285	400	628
r=4	800	1200	2000	2801	4401
r=5	5602	8403	14005	19608	30812
r=6	39216	58824	98040	137257	215689
r=7	274514	411771	686285	960800	1509828
r=8	1921600	2882400	4804000	6725601	10568801
r=9	13451202	20176803	33628005	47079208	73981612
r=10	94158416	141237624	235396040	329554457	517871289
r=11	659108914	988663371	1647772285	2306881200	3625099028
r=12	4613762400	6920643600	11534406000	16148168401	25375693201
r=13	32296336802	48444505203	80740842005	113037178808	177629852412
r=14	226074357616	339111536424	565185894040	791260251657	1243408966889
r=15	1582520503314	2373780754971	3956301258285	5538821761600	8703862768228

表 6: $q \cdot 11^r!$ に含まれる 11 の指数

【p=11】	q=2	q=3	q=5	q=7	q=11
r=1	2	3	5	7	12
r=2	24	36	60	84	133
r=3	266	399	665	931	1464
r=4	2928	4392	7320	10248	16105
r=5	32210	48315	80525	112735	177156
r=6	354312	531468	885780	1240092	1948717
r=7	3897434	5846151	9743585	13641019	21435888
r=8	42871776	64307664	107179440	150051216	235794769
r=9	471589538	707384307	1178973845	1650563383	2593742460
r=10	5187484920	7781227380	12968712300	18156197220	28531167061
r=11	57062334122	85593501183	142655835305	199718169427	313842837672
r=12	627685675344	941528513016	1569214188360	2196899863704	3452271214393
r=13	6904542428786	10356813643179	17261356071965	24165898500751	37974983358324
r=14	75949966716648	113924950074972	189874916791620	265824883508268	417724816941565
r=15	835449633883130	1253174450824695	2088624084707825	2924073718590955	4594972986357216

表 7: $6^r!$に含まれる $p = 3 or 2$ の個数

	p=3,q=2	p=2,q=3
r=1	2	4
r=2	17	34
r=3	106	212
r=4	646	1293
r=5	3886	7770
r=6	23326	46650
r=7	139965	279931
r=8	839806	1679610
r=9	5038844	10077688
r=10	30233084	60466167
r=11	181398523	362797043
r=12	1088391163	2176782326
r=13	6530347004	13060694005
r=14	39182082043	78364164082
r=15	235092492280	470184984561

表 8: $10^r!$に含まれる $p = 5 or 2$ の個数

	p=5,q=2	p=2,q=5
r=1	2	8
r=2	24	97
r=3	249	994
r=4	2499	9995
r=5	24999	99994
r=6	249998	999993
r=7	2499999	9999992
r=8	24999999	99999988
r=9	249999998	999999987
r=10	2499999997	9999999989
r=11	24999999997	99999999985
r=12	249999999997	999999999987
r=13	2499999999997	9999999999986
r=14	24999999999998	99999999999983
r=15	249999999999997	999999999999980

表 9: $15^r!$に含まれる $p = 5 or 3$ の個数

	p=5,q=3	p=3,q=5
r=1	3	6
r=2	55	110
r=3	843	1684
r=4	12655	25309
r=5	189841	379683
r=6	2847654	5695308
r=7	42714841	85429681
r=8	640722654	1281445305
r=9	9610839841	19221679681
r=10	144162597651	288325195306
r=11	2162438964840	4324877929679
r=12	32436584472653	64873168945303
r=13	486548767089839	973097534179677
r=14	7298231506347651	14596463012695302
r=15	109473472595214839	218946945190429674

4 考察

3.1【$p^r!$に含まれる p の個数 $E_p(p^r)$】
表から，二項間の階差をとると，$p^s(1 \leq s \leq r-1)$ になることがわかる．
また，初項はすべて 1 より，

$$E_p(p^r) = 1 + \sum_{s=1}^{r-1} p^s$$

$$E_p(p^r) = \frac{p^r - 1}{p - 1}$$

と推測できる．

以下の方法でも同様の結果が推測できる．
$E_p(p) = 1$

$$\begin{aligned} E_p(p^2) &= E_p(p) + p(n_1 = p^2//p = p) \\ &= E_p(1) + 1 + p(n_2 = p//p = 1) \\ &= 1 + p(n_3 = 1//p = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_p(p^3) &= E_p(p^2) + p^2(n_1 = p^3//p = p^2) \\ &= 1 + p + p^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_p(p^r) &= 1 + p + \cdots + p^{r-1} \\ &= \tfrac{p^r-1}{p-1} \end{aligned}$$

数学的帰納法により証明する．
(i)r=1 のとき，

$$E_p(p) = \frac{p-1}{p-1} = 1$$

(ii)r=k（k は自然数）のとき，

$$E_p(p^k) = \frac{p^k-1}{p-1}$$

が成り立つと仮定する．r=k+1 のとき，

$$E_p(p^{k+1}) = E_p(p^k) + p^k = \frac{p^k-1}{p-1} + p^k = \frac{p^k-1+p^{k+1}-p^k}{p-1} = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

よって成り立つ．

(i)(ii) より，自然数 r において

$$E_p(p^r) = \frac{p^r-1}{p-1}$$

が成り立つ．　（終）

3.2【qp^r!に含まれる p の個数 $E_p(qp^r)$】
表から，二項間の階差をとると，$qp^s(1 \leq s \leq r-1)$ になることがわかる．
また，初項を $E_p(qp)$ と表せば，

$$E_p(qp^r) = E_p(qp) + q\sum_{s=1}^{r-1} p^s$$

$$E_p(qp^r) = E_p(q) + \frac{q(p^r-1)}{p-1}$$

以下の方法でも同様の結果が推測できる．

$$\begin{aligned}
E_p(qp^r) &= E_p(qp^{r-1}) + qp^{r-1} \\
&= E_p(qp^{r-2}) + qp^{r-2} + qp^{r-1} \\
&= E_p(qp^{r-3}) + qp^{r-3} + qp^{r-2} + qp^{r-3} \\
&\quad\vdots \\
&= E_p(qp^{r-r}) + qp^{r-r} + qp + qp^2 + \cdots + qp^{r-2} + qp^{r-1} \\
&= E_p(q) + q(1 + p + p^2 + \cdots + p^{r-1}) \\
&= E_p(q) + \tfrac{q(p^r-1)}{p-1}
\end{aligned}$$

数学的帰納法により証明する．
(i)r=1 のとき，

$$E_p(qp) = E_p(q) + q$$

また、推測した式に r=1 を代入すると，

$$E_p(qp) = E_p(q) + \frac{q(p-1)}{p-1} = E_p(q) + q$$

よって成立．
(ii)r=k のとき，

$$E_p(qp^k) = E_p(q) + \frac{q(p^k-1)}{p-1}$$

が成立すると仮定する．

r=k+1 のとき，

$$E_p(qp^{k+1}) = E_p(qp^k) + qp^k = E_p(q) + \frac{q(p^k-1)}{p-1} + qp^k = E_p(q) + \frac{q(p^{k+1}-1)}{p-1}$$

よって成立．

(i)(ii) より，自然数 r において

$$E_p(qp^r) = E_p(q) + \frac{q(p^r-1)}{p-1}$$

が成り立つ．　（終）

3.3【$(qp)^r!$に含まれる p の個数 $E_p((qp)^r)$】

例として，$10^r!$ に含まれる 5 の個数

$$E_5(10^r)$$

について考える．

p=5,$q=2^r$ とすると、$E_5(10^r)=E_p(qp^r)$ の形になり，3.2 の式が利用できる．

$$E_5(10^r)=E_5(2^r)+\frac{2^r(5^r-1)}{5-1}=E_5(2^r)+\frac{2^r(5^r-1)}{4}$$

$E_5(2^r)$ を求めるために，2^r を 5 進展開する．

$n=2^r$ とおくと，

$$n=2^r=a_05^s+a_15^{s-1}+\cdots+a_s$$

$$n_1=n//5=a_05^{s-1}+a_15^{s-2}+\cdots+a_{s-1}$$

$$\begin{aligned}
E_5(n)&=E_5(n_1)+a_05^{s-1}+a_15^{s-2}+\cdots+a_{s-1}\\
E_5(n_1)&=E_5(n_2)+a_05^{s-2}+a_15^{s-3}+\cdots+a_{s-2}\\
E_5(n_2)&=E_5(n_3)+a_05^{s-3}+a_15^{s-4}+\cdots+a_{s-3}\\
&\vdots\\
E_5(n_{s-1})&=E_5(n_s)+a_0=a_0(n_s=a_0,a_0<5\text{ より},E_5(n_s)=0)
\end{aligned}$$

上記の式をすべて辺々足すと，

$$\begin{aligned}
E_5(n)&=a_05^{s-1}+a_05^{s-2}+\cdots+a_0\\
&\quad+a_15^{s-2}+a_15^{s-3}+\cdots+a_1\\
&\quad+a_25^{s-3}+a_25^{s-4}+\cdots+a_2\\
&\quad+a_35^{s-4}+a_35^{s-5}+\cdots+a_3+\\
&\quad\vdots\\
&\quad+a_{s-1}\\
&=a_0\tfrac{5^s-1}{4}+a_1\tfrac{5^{s-1}-1}{4}+a_2\tfrac{5^{s-2}-1}{4}+\cdots+a_{s-1}\tfrac{5-1}{4}\\
&=\tfrac{1}{4}(a_0(5^s-1)+a_1(5^{s-1}-1)+a_2(5^{s-2}-1)+\cdots+as-1_(5-1)+a_s(1-1))\\
&=\tfrac{1}{4}(a_05^s+a_15^{s-1}+a_25^{s-2}+\cdots+a_s-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_s))\\
&=\tfrac{1}{4}(2^r-sum_5(2^r))\qquad\qquad ※\ a_05^s+a_15^{s-1}+a_25^{s-2}+\cdots+a_s=2^r
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} E_5(10^r) &= \tfrac{1}{4}(2^r - sum_5(2^r)) + \tfrac{2^r(5^r-1)}{4} \\ &= \tfrac{1}{4}(2^r - sum_5(2^r) + 2^r(5^r-1) \end{aligned}$$

$$E_5(10^r) = \frac{1}{4}(10^r - sum_5(2^r))$$

さらに整理すると，

$$\begin{aligned} E_5(10^r) &= \tfrac{100}{4} \cdot 10^{r-2} - \tfrac{1}{4} sum_5(2^r) \\ &= 25 \cdot 10^{r-2} - \tfrac{1}{4} sum_5(2^r) \end{aligned}$$

r=2 のとき，

$$2^2 = 4 = 5^0 \cdot 4 \qquad sum_5(2^2) = 4$$

$$E_5(10^2) = 25 - \frac{4}{4} = 24$$

r=3 のとき，

$$2^3 = 8 = 5^1 \cdot 1 + 5^0 \cdot 3 \qquad sum_5(2^3) = 4$$

$$E_5(10^3) = 250 - \frac{4}{4} = 249$$

r=4 のとき，

$$2^4 = 16 = 5^1 \cdot 3 + 5^0 \cdot 1 \qquad sum_5(2^4) = 4$$

$$E_5(10^4) = 2500 - \frac{4}{4} = 2499$$

r=5 のとき，

$$2^5 = 32 = 5^2 \cdot 1 + 5^1 \cdot 1 + 5^0 \cdot 2 \qquad sum_5(2^5) = 4$$

$$E_5(10^5) = 25000 - \frac{4}{4} = 24999$$

r=6 のとき，

$$2^6 = 64 = 5^2 \cdot 2 + 5^1 \cdot 2 + 5^0 \cdot 4 \qquad sum_5(2^6) = 8$$

$$E_5(10^6) = 250000 - \frac{8}{4} = 249998$$

r=7 のとき，

$$2^7 = 128 = 5^3 \cdot 1 + 5^0 \cdot 3 \qquad sum_5(2^7) = 4$$

$$E_5(10^7) = 2500000 - \frac{4}{4} = 2499999$$

となる．

つまり,$sum_5(2^r)$ の値によって,$E_5(10^r)$ の一の位の数が決まる．

同様に,$E_3(6^r), E_5(15^r)$ についても,

$$E_3(6^r) = \frac{1}{2}(6^r - sum_3(2^r)) \qquad E_5(15^r) = \frac{1}{4}(15^r - sum_5(3^r))$$

以上の結果より,
$(qp)^r!$に含まれる p の個数 $E_p((qp)^r)$ は,

$$E_p((qp)^r) = \frac{1}{p-1}((qp)^r - sum_p(q^r))$$

と表されると推測できる.

これは，$E_5(10^r)$ を求める過程で，$5 = p, 2^r = q$ に戻して考えることで確認できる.

【今後の課題】$E_5(10^r)$ の一の位の数が 9 となるとき, つまり,$sum_5(2^r) = 1$ となるときの規則性はあるか.