$10^R!$ の5の指数について

黒沼壮太

学習院大学理学部数学科

Q.10! に含まれる 0 の個数はいくつか？

A.10!=3628800

2個

Q.100! に含まれる 0 の個数はいくつか？

100! =
9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859 29
638952175999932299156089414639761565182862536979208272237582
511852109168640000000000000000000000000

A.24個

$10^r!$ に含まれる 0 の個数はいくつだろうか？

$r = 1$	2
$r = 2$	24
$r = 3$	249
$r = 4$	2499
$r = 5$	24999
$r = 6$	249998
$r = 7$	2499999
$r = 8$	24999999
$r = 9$	249999998
$r = 10$	2499999997
$r = 11$	24999999997
$r = 12$	249999999997
$r = 13$	2499999999997
$r = 14$	24999999999998
$r = 15$	249999999999997

$E_p(n)$の定義

$n!$ を積の形に展開すると,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$$

この $n!$ の中に素数 p が $E_p(n)$個含まれるとき,

$$n! = p^{E_p(n)} \cdot \cdots$$

と表すことができる.

このとき，次のことが言える.

$$n_1 = n//p$$
$$E_p(n) = E_p(n_1) + n_1$$

目的

素数p,qに対して,$E_p((qp)^r)$の一般式を求める.

とくに,$p=5, q=2$のとき,$E_5(10^r)$

●準備1●

$p^r!$ に含まれる p の指数 $E_p(p^r)$ を調べる

	$p=2$	$p=3$	$p=5$	$p=7$	$p=11$
$r=1$	1	1	1	1	1
$r=2$	3	4	6	8	12
$r=3$	7	13	31	57	133
$r=4$	15	40	156	400	1464
$r=5$	31	121	781	2801	16105
$r=6$	63	364	3906	19608	177156
$r=7$	127	1093	19531	137257	1948717
$r=8$	255	3280	97656	960800	21435888
$r=9$	511	9841	488281	6725601	235794769
$r=10$	1023	29524	2441406	47079208	2593742460
$r=11$	2047	88573	12207031	329554457	28531167061
$r=12$	4095	265720	61035156	2306881200	313842837672
$r=13$	8191	797161	305175781	16148168401	3452271214393
$r=14$	16383	2391484	1525878906	113037178808	37974983358324
$r=15$	32767	7174453	7629394531	791260251657	417724816941565

r	$E_2(2^r)$	階差	$E_3(3^r)$	階差
1	1		1	
2	3	2^1	4	3^1
3	7	2^2	13	3^2
4	15	2^3	40	3^3
5	31	2^4	121	3^4
6	63	2^5	364	3^5
7	127	2^6	1093	3^6
8	255	2^7	3280	3^7
9	511	2^8	9841	3^8
10	1023	2^9	29524	3^9
11	2047	2^{10}	88573	3^{10}
12	4095	2^{11}	265720	3^{11}
13	8191	2^{12}	797161	3^{12}
14	16383	2^{13}	2391484	3^{13}

●準備2●

$qp^r!$ に含まれる p の指数 $E_p(qp^r)$ を調べる

【$p = 2$】	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 7$	$q = 11$
$r = 1$	3	4	8	11	19
$r = 2$	7	10	18	25	41
$r = 3$	15	22	38	53	85
$r = 4$	31	46	78	109	173
$r = 5$	63	94	158	221	349
$r = 6$	127	190	318	445	701
$r = 7$	255	382	638	893	1405
$r = 8$	511	766	1278	1789	2813
$r = 9$	1023	1534	2558	3581	5629
$r = 10$	2047	3070	5118	7165	11261
$r = 11$	4095	6142	10238	14333	22525
$r = 12$	8191	12286	20478	28669	45053
$r = 13$	16383	24574	40958	57341	90109
$r = 14$	32767	49150	81918	114685	180221
$r = 15$	65535	98302	163838	229373	360445

r	$E_2(3 \cdot 2^r)$	階差
1	4	
2	10	$3 \cdot 2^1$
3	22	$3 \cdot 2^2$
4	46	$3 \cdot 2^3$
5	94	$3 \cdot 2^4$
6	190	$3 \cdot 2^5$
7	382	$3 \cdot 2^6$
8	766	$3 \cdot 2^7$
9	1534	$3 \cdot 2^8$
10	3070	$3 \cdot 2^9$
11	6142	$3 \cdot 2^{10}$
12	12286	$3 \cdot 2^{11}$
13	24574	$3 \cdot 2^{12}$
14	49150	$3 \cdot 2^{13}$

$qp^r!$ に含まれる p の指数

表から，二項間の階差をとると，$qp^s (1 \leq s \leq r-1)$ になることがわかる．
また，初項を $E_p(qp)$ と表せば,

$$E_p(qp^r) = E_p(qp) + q\sum_{s=1}^{r-1} p^s$$

$$= E_p(q) + q + \frac{qp(p^{r-1}-1)}{p-1}$$

まとめると,

$$E_p(qp^r) = E_p(q) + \frac{q(p^r-1)}{p-1}$$

$E_5(10^r)$ について考える.

$p=5, q=2^r$ とおくと, $E_5(10^r)=E_p(qp^r)$ の形で表すことができ,

先に述べた一般式が利用できる.

$$\boxed{E_5(10^r)=E_5(2^r)+\frac{2^r(5^r-1)}{4}}$$

$E_5(2^r)$ を求めるために，2^r を 5 進展開する．

$n = 2^r$ とおくと，

$$n = 2^r = a_0 5^s + a_1 5^{s-1} + \cdots + a_s$$
$$n_1 = n//5 = a_0 5^{s-1} + a_1 5^{s-2} + \cdots + a_{s-1}$$

$$E_5(n) = E_5(n_1) + a_0 5^{s-1} + a_1 5^{s-2} + \cdots + a_{s-1}$$
$$E_5(n_1) = E_5(n_2) + a_0 5^{s-2} + a_1 5^{s-3} + \cdots + a_{s-2}$$
$$E_5(n_2) = E_5(n_3) + a_0 5^{s-3} + a_1 5^{s-4} + \cdots + a_{s-3}$$
$$\vdots$$
$$E_5(n_{s-1}) = E_5(n_s) + a_0 = a_0$$

辺々足すと,

$$E_5(n) = a_0 5^{s-1} + a_0 5^{s-2} + \cdots + a_0$$
$$+a_1 5^{s-2} + a_1 5^{s-3} + \cdots + a_1$$
$$+a_2 5^{s-3} + a_2 5^{s-4} + \cdots + a_2$$
$$+a_3 5^{s-4} + a_3 5^{s-5} + \cdots + a_3 +$$
$$\vdots$$
$$+a_{s-1}$$
$$= a_0 \frac{5^s - 1}{4} + a_1 \frac{5^{s-1} - 1}{4} + a_2 \frac{5^{s-2} - 1}{4} + \cdots + a_{s-1} \frac{5-1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(a_0(5^s - 1) + a_1(5^{s-1} - 1) + \cdots + a_{s-1}(5 - 1) + a_s(1 - 1))$$
$$= \frac{1}{4}(a_0 5^s + a_1 5^{s-1} + a_2 5^{s-2} + \cdots + a_s - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_s))$$
$$= \frac{1}{4}(2^r - sum_5(2^r))$$

よって,

$E_5(10^r)=\frac{1}{4}(2^r-sum_5(2^r))+\frac{2^r(5^r-1)}{4}$

$$E_5(10^r)=\frac{1}{4}(10^r-sum_5(2^r))$$

さらに整理すると,

$$\boxed{E_5(10^r)=25\cdot 10^{r-2}-\frac{1}{4}sum_5(2^r)}$$

特に,$sum_5(2^r)=1$のとき,一の位は9.

$sum_5(2^r)$の値によって,$E_5(10^r)$の一の位の値が決まる.

例1.$E_5(10^4)$ を求める.

$$2^4 = 16 = 5^1 \cdot \boxed{3} + 5^0 \cdot \boxed{1}$$

$$sum_5(2^4) = \boxed{4}$$

$$E_5(10^4) = 2500 - \frac{\boxed{4}}{4} = 2499$$

例2.$E_5(10^6)$を求める.

$$2^6 = 64 = 5^2 \cdot \boxed{2} + 5^1 \cdot \boxed{2} + 5^0 \cdot \boxed{4}$$

$$sum_5(2^6) = \boxed{8}$$

$$E_5(10^6) = 250000 - \frac{\boxed{8}}{4} = 249998$$

r	$E_5(10^r)$	$sum_5(2^r)$
1	2	2
2	24	1
3	249	1
4	2499	1
5	24999	1
6	249998	2
7	2499999	1
8	24999999	1
9	249999998	2
10	2499999997	3
11	24999999997	3
12	249999999997	3
13	2499999999997	3
14	24999999999998	2
15	249999999999997	3

$(qp)^r!$ に含まれる p の指数 $E_p((qp)^r)$

一般に, 素数 p, q に対して,

$$E_p((qp)^r) = \frac{1}{p-1}((qp)^r - sum_p(q^r))$$

今後の課題

$E_5(10^r)$ の一の位の数が9となるとき, つまり, $sum_5(2^r) = 1$ となる r は,$r = 3, 4, 5, 7, 8$ だけしか存在しないのか. その証明方法を模索したい.