2分割シャッフリングの研究

溝口 政紀

学習院大学理学部数学科

Contents

1. 目的

この研究では，2分割シャッフリングした場合の枚数と周期の関係を調べる.

2. 方法

2分割シャッフリングを説明する.
10枚のときを例に挙げる.
カードを

$$L = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

と順番に並べる.

A=[1,2,3,4,5], B=[6,7,8,9,10]

という様にカードを2分割にし，Bから6,Aから1とカードを交互にとり続ける.
これを2分割シャッフリングという.

$$L = [6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5]$$

これを10回繰り返すと

1 [6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5]
2 [3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8]
3 [7, 3, 10, 6, 2, 9, 5, 1, 8, 4]
4 [9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2]
5 [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
6 [5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6]
7 [8, 5, 2, 10, 7, 4, 1, 9, 6, 3]
8 [4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7]
9 [2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9]
10 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

となり、10回で元に戻る。
元に戻った回数を周期という.
つまり10枚の時の周期は，10である.

3. 結果

200枚までのシャッフリングの結果を表にする.

Table 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数$(2n)$	周期	$2n-$周期	$2n+1$	$2n/$周期	オイラー	オイラー/周期
10	10	0	11	1	10	1
12	12	0	13	1	12	1
18	18	0	19	1	18	1
28	28	0	29	1	28	1
36	36	0	37	1	36	1
52	52	0	53	1	52	1
58	58	0	59	1	58	1
60	60	0	61	1	60	1
66	66	0	67	1	66	1
82	82	0	83	1	82	1
100	100	0	101	1	100	1
106	106	0	107	1	106	1
130	130	0	131	1	130	1
138	138	0	139	1	138	1

Table 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数$(2n)$	周期	$2n-$周期	$2n+1$	$2n/$周期	オイラー	オイラー$/$周期
168	156	12	169	1.08	156	1
120	110	10	121	1.09	110	1
24	20	4	25	1.2	20	1
124	100	24	125	1.24	100	1
8	6	2	9	1.33	6	1
26	18	8	27	1.44	18	1
80	54	26	81	1.48	54	1
6	3	3	7	2	6	2
16	8	8	17	2	16	2
22	11	11	23	2	22	2
40	20	20	41	2	40	2
46	23	23	47	2	46	2
70	35	35	71	2	70	2
78	39	39	79	2	78	2
96	48	48	97	2	96	2
102	51	51	103	2	102	2
136	68	68	137	2	136	2

Table 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数$(2n)$	周期	$2n-$周期	$2n+1$	$2n/$周期	オイラー	オイラー$/$周期
76	30	46	77	2.53	60	2
114	44	70	115	2.59	88	2
94	36	58	95	2.61	72	2
54	20	34	55	2.7	40	2
34	12	22	35	2.83	24	2
174	60	114	175	2.9	120	2
200	66	134	201	3.03	132	2
182	60	122	183	3.03	120	2
176	58	118	177	3.03	116	2
158	52	106	159	3.04	104	2
140	46	94	141	3.04	92	2
110	36	74	111	3.06	72	2
86	28	58	87	3.07	56	2
68	22	46	69	3.09	44	2
56	18	38	57	3.11	36	2
38	12	26	39	3.17	24	2
32	10	22	33	3.2	20	2

Table 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数$(2n)$	周期	$2n-$周期	$2n+1$	$2n/$周期	オイラー	オイラー/周期
134	36	98	135	3.72	72	2
42	14	28	43	3	42	3
108	36	72	109	3	108	3
156	52	104	157	3	156	3
112	28	84	113	4	112	4
186	40	146	187	4.65	160	4
160	33	127	161	4.85	132	4
118	24	94	119	4.92	96	4
184	36	148	185	5.11	144	4
144	28	116	145	5.14	112	4
64	12	52	65	5.33	48	4
122	20	102	123	6.1	80	4
50	8	42	51	6.25	32	4
152	24	128	153	6.33	96	4
164	20	144	165	8.2	80	4
104	12	92	105	8.67	48	4
30	5	25	31	6	30	6

Table 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数$(2n)$	周期	$2n-$周期	$2n+1$	$2n/$周期	オイラー	オイラー$/$周期
116	12	104	117	9.67	72	6
62	6	56	63	10.33	36	6
188	18	170	189	10.44	108	6
72	9	63	73	8	72	8
88	11	77	89	8	88	8
84	8	76	85	10.5	64	8
194	12	182	195	16.17	96	8
150	15	135	151	10	150	10
126	7	119	127	18	126	18

4. 考察

枚数と周期の関係性を考えてみる.
枚数を10としたときのシャッフリングを考える.
最初の並び方をxとし,1回シャッフリングしたときの並び方をyとする.

Table 2. 枚数を10としたときのシャッフリング

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$2y$	12	2	14	4	16	6	18	8	20	10
$2y-x$	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0

となることから,

$$2y = x \ or \ x + 11$$

よって,

$$2y - x \equiv 0 \bmod 11 \ldots (1)$$

たとえば,$6x$について考えてみる.

TABLE 3. xを6倍してmod11で考える

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$6x$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
$6x \bmod 11$	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

$$2 * 6 = 12 \equiv 1 \bmod 11$$

(1) より

$$y \equiv 6x \bmod 11 \ldots (2)$$

よって,1 回 x をシャッフリングした結果は 6 倍してから 11 で割った余りを求めることで得られる．さらに,2 回 x をシャッフリングしたものを A とすると,同様にして求められるので

$$A \equiv 6y \bmod 11$$

(2) より

$$A \equiv 6 * 6x = 6^2 x \bmod 11$$

これを繰り返し,m 回シャッフリングをしたときに元に戻るとすると,

$$6^m x \equiv x \bmod 11$$

$$6^m \equiv 1 \bmod 11 \ldots (3)$$

つまり,(3) の式を満たす最小の m が周期になるので,
枚数を 10 としたときの周期は 10 と求めることができる.
また,(3) の式の両辺に 2^m をかけると,

$$6^m * 2^m \equiv 2^m \bmod 11$$

$$(6 * 2)^m \equiv 2^m \bmod 11$$

$$12^m \equiv 1^m \bmod 11$$

より,

$$2^m \equiv 1 \bmod 11$$

一般に枚数を$2n$としたときのシャッフリングを考える.
最初の並び方をxとし,1回シャッフリングしたときの並び方をyとする.

Table 4

x	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$	$2n-1$	$2n$
y	$n+1$	1	$n+2$	2	$n+3$	3	$n+4$	$\ldots$	$2n$	n
$2y$	$2n+2$	2	$2n+4$	4	$2n+6$	6	$2n+8$	$\ldots$	$4n$	$2n$
$2y-x$	$2n+1$	0	$2n+1$	0	$2n+1$	0	$2n+1$	$\ldots$	$2n+1$	0

上図より,

$$2y \equiv x \bmod 2n+1$$

枚数が10したときと同様に考えて,

$$2^m \equiv 1 \bmod 2n+1 \ldots (4)$$

となり, 枚数 $2n$ のときは(4)の式を満たす最小の整数 m が周期となる.
(4)より,t を整数とすると

$$2^m - 1 = t(2n+1) \ldots (5)$$

(5)より, 周期mから枚数$2n$を求めることができる.

例えば,周期$= m = 8$ に対する枚数を求める.
(5)の式より,

$$2^8 - 1 = t(2n+1)$$
$$255 = t(2n+1)$$
$$255 = 3 * 5 * 17$$

より,255の因数は 3,5,15,17,51,85,255

よって,枚数を

$$2n = 2, 4, 14, 16, 50, 84, 254$$

と求めることができた.

周期mに対する枚数$2n$は,$2^m - 1$の因数に1引いた数である.実際には,m回のシャッフリングで元に戻るということであるので, mのときの因数がmより小さい数sで出てくることもあり, 最小のsが周期となる.

以上の結果から以下の特徴がみられた.

- 周期は,必ず枚数以下.
- 周期と枚数が等しいとき,枚数$+1$は素数.
- オイラーと周期が等しく,枚数$\div$周期の値が1より大きく,2より小さいとき$2n+1$は素数の累乗.