2分割シャッフリング

溝口政紀
学習院大学理学部数学科

平成 25 年 2 月 1 日

目 次

1　目的

この研究では，2 分割シャッフリングした場合の枚数と周期の関係を調べる．

2　方法

2.1　10 枚での 2 分割シャッフリング

2 分割のシャッフリングを説明する．
10 枚のときを例に挙げる．

10 枚のカードを
L=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
と，順番に並べる．そのカードを
A=[1,2,3,4,5]
B=[6,7,8,9,10]
という様に 2 分割にし，B から 6,A から 1 と交互にとり続ける．
2 分割シャッフリングを 1 回行うと
L=[6,1,7,2,8,3,9,4,10,5]
となる．
これを 10 回繰り返すと

1 [6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5]
2 [3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8]
3 [7, 3, 10, 6, 2, 9, 5, 1, 8, 4]
4 [9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2]
5 [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
6 [5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6]
7 [8, 5, 2, 10, 7, 4, 1, 9, 6, 3]
8 [4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7]
9 [2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9]
10 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

となり、10 回で元に戻る。
このように，元に戻った回数を周期という．
つまり枚数が 10 枚の時の周期は，10 である．

2.2 $2n$ 枚での 2 分割シャッフリング

swi-prolog を用いる.

```
/** リストの結合と分離 **/
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).

/** 2 つのリストをシャッフリング **/
shf([]+[]=[]).
shf([X|B]+[Y|C]=[Y,X|F]):-shf(B+C=F).

/** リストを 2 分割 **/
left(A=B+C,N):-append0(A=B+C),length(B,N).

/** リストを 1 回 2 分割シャッフリング **/
shf2(L,M):-length(L,S2),
S is S2//2,
left(L=A+B,S),
shf(A+B=M).

/** 枚数に対する周期 **/
shf4(W,L,C,R):-C1 is C+1,
shf2(L,M),
(   M=W ->write(C);
(C1<R ->shf4(W,M,C1,R);write(C1))).

/** 単位順列 **/
unit([],0).
unit(L,N):-N>0,N1 is N-1,
unit(L1,N1),
append0(L=L1+[N]).

//** 枚数に対する周期を調べる為の入力を簡単にできるプログラミング *//
shf5(E,R):-unit(L,E),
shf4(L,L,1,R).

//** 繰り返し **//
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
I1 is I+1,for(I1=<J,K).
```

```
//** $2n$(n\ge 3) 枚までの周期を全て表示 **//
shf6(A,R):-for(3=<A,E),
write(e=E),
put(9),
shf5(E,R),nl,
fail.

shf6(A,R).
```

このプログラミングを実行すると、
以下のように枚数に対する周期を一度に表示できる.

```
e=3	e=4	4
e=5	e=6	3
e=7	e=8	6
e=9	e=10	10
e=11	e=12	12
e=13	e=14	4
e=15	e=16	8
e=17	e=18	18
e=19	e=20	6
e=21	e=22	11
e=23	e=24	20
e=25	e=26	18
e=27	e=28	28
e=29	e=30	5
e=31	e=32	10
e=33	e=34	12
e=35	e=36	36
e=37	e=38	12
e=39	e=40	20
e=41	e=42	14
e=43	e=44	12
e=45	e=46	23
e=47	e=48	21
e=49	e=50	8
e=51	e=52	52
e=53	e=54	20
e=55	e=56	18
e=57	e=58	58
e=59	e=60	60
e=61	e=62	6
e=63	e=64	12
e=65	e=66	66
e=67	e=68	22
```

```
e=69    e=70    35
e=71    e=72    9
e=73    e=74    20
e=75    e=76    30
e=77    e=78    39
e=79    e=80    54
e=81    e=82    82
e=83    e=84    8
e=85    e=86    28
e=87    e=88    11
e=89    e=90    12
e=91    e=92    10
e=93    e=94    36
e=95    e=96    48
e=97    e=98    30
e=99    e=10     10
```

```
//** 因数分解 **//
factor(P/2):-Q is P//2,P =:= 2*Q,!.
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),
for(1 =<P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
P =:= J1*Q,I= J1,!.
factor(P/P):- !.
factorize(P,[P]):-factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.

//** Nのオイラー関数 **//
euler(N,E):- factor(N/I),I=:=N,E is N-1,!.
euler(N,E):- factor(N/I),!,
N1 is N//I,
    euler(N1,E1),
( N1 =:= (N1//I)*I ->E is I*E1;
E is (I-1)*E1).

//** Nまでのオイラー関数をすべて表示 **//
shf8(N):-for(3=<N,E1),
```

```
E is 2*E1-1,
write(E),put(9),
euler(E,F),
write(F),nl,
fail.

shf8(N,E).
```

3 結果

$2n$ 枚のプログラミングを実行し，200 枚までのシャッフリングの結果を表にする．

表 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数 (2n)	周期	$2n-$ 周期	$2n+1$	$2n/$ 周期	オイラー	オイラー / 周期
10	10	0	11	1	10	1
12	12	0	13	1	12	1
18	18	0	19	1	18	1
28	28	0	29	1	28	1
36	36	0	37	1	36	1
52	52	0	53	1	52	1
58	58	0	59	1	58	1
60	60	0	61	1	60	1
66	66	0	67	1	66	1
82	82	0	83	1	82	1
10	10	0	10	1	10	1
10	10	0	10	1	10	1
130	130	0	131	1	130	1
138	138	0	139	1	138	1
148	148	0	149	1	148	1
162	162	0	163	1	162	1
172	172	0	173	1	172	1
178	178	0	179	1	178	1
180	180	0	181	1	180	1
196	196	0	197	1	196	1
168	156	12	169	1.08	156	1
120	110	10	121	1.09	110	1
24	20	4	25	1.2	20	1
124	10	24	125	1.24	10	1
8	6	2	9	1.33	6	1
26	18	8	27	1.44	18	1
80	54	26	81	1.48	54	1
6	3	3	7	2	6	2
16	8	8	17	2	16	2
22	11	11	23	2	22	2
40	20	20	41	2	40	2
46	23	23	47	2	46	2
70	35	35	71	2	70	2
78	39	39	79	2	78	2
96	48	48	97	2	96	2

表 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数 (2n)	周期	$2n-$ 周期	$2n+1$	$2n/$ 周期	オイラー	オイラー / 周期
10	51	51	10	2	10	2
136	68	68	137	2	136	2
166	83	83	167	2	166	2
190	95	95	191	2	190	2
192	96	96	193	2	192	2
198	99	99	199	2	198	2
48	21	27	49	2.29	42	2
142	60	82	143	2.37	120	2
76	30	46	77	2.53	60	2
114	44	70	115	2.59	88	2
94	36	58	95	2.61	72	2
54	20	34	55	2.7	40	2
34	12	22	35	2.83	24	2
174	60	114	175	2.9	120	2
200	66	134	201	3.03	132	2
182	60	122	183	3.03	120	2
176	58	118	177	3.03	116	2
158	52	10	159	3.04	10	2
140	46	94	141	3.04	92	2
110	36	74	111	3.06	72	2
86	28	58	87	3.07	56	2
68	22	46	69	3.09	44	2
56	18	38	57	3.11	36	2
38	12	26	39	3.17	24	2
32	10	22	33	3.2	20	2
98	30	68	99	3.27	60	2
20	6	14	21	3.33	12	2
146	42	10	147	3.48	84	2
14	4	10	15	3.5	8	2
44	12	32	45	3.67	24	2
74	20	54	75	3.7	40	2
134	36	98	135	3.72	72	2
42	14	28	43	3	42	3
10	36	72	10	3	10	3
156	52	10	157	3	156	3
112	28	84	113	4	112	4
186	40	146	187	4.65	160	4
160	33	127	161	4.85	132	4

表 1: オイラーとは,$\phi(2n+1)$

枚数 (2n)	周期	$2n-$ 周期	$2n+1$	$2n/$ 周期	オイラー	オイラー / 周期
118	24	94	119	4.92	96	4
184	36	148	185	5.11	144	4
144	28	116	145	5.14	112	4
64	12	52	65	5.33	48	4
122	20	10	123	6.1	80	4
50	8	42	51	6.25	32	4
152	24	128	153	6.33	96	4
164	20	144	165	8.2	80	4
10	12	92	10	8.67	48	4
30	5	25	31	6	30	6
132	18	114	133	7.33	10	6
90	12	78	91	7.5	72	6
154	20	134	155	7.7	120	6
128	14	114	129	9.14	84	6
92	10	82	93	9.2	60	6
170	18	152	171	9.44	10	6
116	12	10	117	9.67	72	6
62	6	56	63	103	36	6
188	18	170	189	104	10	6
72	9	63	73	8	72	8
88	11	77	89	8	88	8
84	8	76	85	10	64	8
194	12	182	195	16.17	96	8
150	15	135	151	10	150	10
126	7	119	127	18	126	18

4 考察

枚数と周期の関係性を考えてみる.
枚数を 10 としたときのシャッフリングを考える.
最初の並び方を x とし,1 回シャッフリングしたときの並び方を y とする.

表 2: 枚数を 10 したときのシャッフリング

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$2y$	12	2	14	4	16	6	18	8	20	10
$2y-x$	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0

となることから,

$$2y = x \ or \ x + 11$$

よって,

$$2y - x \equiv 0 \bmod 11$$

$$y \equiv \frac{1}{2}x \bmod 11 \ldots (1)$$

たとえば,$6x$ について考えてみる.

表 3: x を 6 倍して mod 11 で考える

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$6x$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
$6x \bmod 11$	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

$$2 * 6 = 12 \equiv 1 \bmod 11$$

$$6 \equiv \frac{1}{2} \bmod 11$$

(1) に代入して

$$y \equiv 6x \bmod 11 \ldots (2)$$

つまり,1 回 x をシャッフリングした結果は 6 倍してから 11 で割った余りを求めることで得られる.
さらに,2 回 x をシャッフリングしたものを A とすると, 同様にして求められるので

$$A \equiv 6y \bmod 11$$

(2) より

$$A \equiv 6 * 6x = 6^2 x \bmod 11$$

これを繰り返し,m 回シャッフリングをしたときに元に戻るとすると,

$$6^m x \equiv x \bmod 11$$

$$6^m \equiv 1 \bmod 11 \ldots (3)$$

つまり,(3) の式を満たす最小の m が周期になるので,
枚数を 10 としたときの周期は 10 であると求めることができる.
また,(3) の式の両辺に 2^m をかけると,

$$6^m * 2^2 \equiv 2^m \bmod 11$$

$$(6 * 2)^m \equiv 2^m \bmod 11$$

$$1^m = 1 \equiv 2^m \bmod 11$$

よって,(3) は

$$2^m \equiv 1 \bmod 11$$

と書き直すことができる.

一般に枚数を $2n$ としたときのシャッフリングを考える.
最初の並び方を x とし,1 回シャッフリングしたときの並び方を y とする.

表 4:

x	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$	$2n-1$	$2n$
y	$n+1$	1	$n+2$	2	$n+3$	3	$n+4$	$\ldots$	$2n$	n
$2y$	$2n+2$	2	$2n+4$	4	$2n+6$	6	$2n+8$	$\ldots$	$4n$	$2n$
$2y-x$	$2n+1$	0	$2n+1$	0	$2n+1$	0	$2n+1$	$\ldots$	$2n+1$	0

上図より,

$$2y \equiv x \bmod 2n+1$$

枚数を 10 としたときと同様に考えて,

$$2^m \equiv 1 \bmod 2n+1 \ldots (4)$$

となり, 枚数 2n のときは (4) の式を満たす最小の整数 m が周期となる.
(4) より,t を整数とすると

$$2^m - 1 = t(2n+1) \ldots (5)$$

これより, 周期から枚数を求めることができる.

例えば, 周期 $= m =$8 に対する枚数を求める.
(5) の式より,

$$2^8 - 1 = t(2n+1)$$

$$255 = t(2n+1)$$

$$255 = 3 * 5 * 17$$

より,255 の因数は 3,5,15,17,51,85,255

よって, 枚数を

$$2n = 2, 4, 14, 16, 50, 84, 254$$

と求めることができた.
つまり, 周期 m に対する枚数 $2n$ は,$2^m - 1$ の因数に 1 引いた数である.
実際には,m 回のシャッフリングで元に戻るということであるので
m のときの因数が,m より小さい数 s で出てくることもあり,
最小の s が周期となる.

以上の結果から以下の特徴がみられた.

- 周期は, 必ず枚数以下.
- 周期と枚数が等しいとき, 枚数 +1 は素数.
- オイラーと周期が等しく, 枚数 ÷ 周期の値が 1 より大きく,2 より小さいとき枚数 +1 は素数の累乗.

5 感想

最初はパソコンの知識もなくとても不安だったが, 飯高先生が長期間にわたり丁寧に教えてくださったので
少しずつゼミにくるのが楽しみになってきました。
後期になり 2 分割シャッフリングを研究しはじめて, 最初はプログラムを作るのも大変だったが
トランプなどの身近なことで考えられたので, 楽しく研究できました.
まだまだ, 知識も足りず研究し損ねたこともあり後悔はあるが,
飯高ゼミはみんなで協力をし合い, 成長もすることができたので, このゼミに所属して本当によかったです.