$\frac{1}{7P}$の小数展開の循環節

学習院大学理学部数学科 内藤ひとみ

Contents

1. 目的

例 1

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\cdots$$

循環節 [142857] を 2 分割して足すと、
$[142] + [857] = [999]$ となる。

例 2

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923\cdots$$

循環節 [076923] を 2 分割して足すと、
$[076] + [923] = [999]$ となる。

　一般に素数pについて分数$\frac{1}{p}$を小数展開し、
循環節の長さuが偶数のとき（$u=2m$）、
循環節の2分割和は9が並ぶ。

　ここでは、$\frac{1}{7p}$の小数展開に注目し、
2分割和や2分割差について
研究を深めていくことを目的とする。

予備知識

分母がbのとき　$g^u \equiv 1 \bmod b$ をみたす
最小のuが周期（長さ）

2. $\dfrac{1}{7p}$ の分割和の場合分け

$\dfrac{1}{7p}$ の循環節の 2 分割和をかきだすと次のようになる。
表を観察すると、３つのパターンがある。

Table 1. $\frac{1}{7p}$ の循環節の 2 分割和

分母	2 分割和	長さ	$g^m \pmod{p}$	$g^m \pmod{7}$
[3,7]	[6,6,6]	3	-1	-1
[7,7]	[9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9]	21	-1	-1
[7,11]	[9,9,9]	3	-1	-1
[7,13]	[9,9,9]	3	-1	-1
[7,17]	[4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1]	24	-1	+1
[7,19]	[9,9,9,9,9,9,9,9,9]	9	-1	-1
[7,23]	[9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9]	33	-1	-1
[7,29]	[2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,,,]	42	-1	+1
[7,31]	[5,8,0,6,4,5,1,6,1,2,9,0,3,2,2]	15	+1	-1
[7,37]	[8,6,4]	3	+1	-1
[7,41]	[2,9,2,6,8,2,9,2,6,8,2,9,2,6,8]	15	+1	-1
[7,43]	[7,2,0,9,3,0,2,3,2,5,5,8,1,3,9,5,3,4,8,8,3]	21	+1	-1
[7,47]	[9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,,,,]	69	-1	-1
[7,53]	[4,3,3,9,6,2,2,6,4,1,5,0,9,4,3,3,9,6,2,2,6,4,1,5,0,9,4,3,3,9,6,2,,,]	39	+1	-1
[7,59]	[9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,,,]	87	-1	-1
[7,61]	[8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2]	30	-1	+1
[7,67]	[4,3,2,8,3,5,8,2,0,8,9,5,5,2,2,3,8,8,0,5,9,7,0,1,4,9,2,5,3,7,3,1,3]	33	+1	-1
[7,71]	[7,1,8,3,0,9,8,5,9,1,5,4,9,2,9,5,7,7,4,6,4,7,8,8,7,3,2,3,9,4,3,6,,,]	105	+1	-1
[7,73]	[4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1]	12	-1	+1

表を観察すると、３つのパターンがある。

☒9がならぶ（黒）
☒142857の回転がならぶ（青）
☒それ以外の数字がならぶ（赤）

場合分け

$$g^u = g^{2m} \equiv 1 \mod 7p$$

$$g^m \equiv \pm 1 \mod p,\ g^m \equiv \pm 1 \mod 7.$$

mod p で場合分けすると（$g^m \equiv +1$ または -1 なので）

（１）A 型：$g^m \equiv 1 \mod p$ → （赤）

（２）B 型：$g^m \equiv -1 \mod p$

mod 7 で場合分けすると

（a）B_+ 型：$g^m \equiv 1 \mod 7$ → （青）

（b）B_- 型：$g^m \equiv -1 \mod 7$ → （黒）

3. A型の2分割和

（例）　分母　$7 * 41$

→循環節　[003484320557491　289198606271777]

$$
\begin{array}{r}
289198606271777 \\
+\ 003484320557491 \\
\hline
292682926829268
\end{array}
$$

→循環節の2分割和　[29268　29268 29268]

→$\frac{12}{41}$の循環節が3つならぶ。

表1からA型（赤）の場合について
2分割和をかきだすと次のようになる。

Table 2. A 型の 2 分割和

分母	2 分割和	長さ	回数
[7,31]	[5,8,0,6,4,5,1,6,1,2,9,0,3,2,2]	15	1
[7,37]	[8,6,4]	3	1
[7,41]	[2,9,2,6,8/2,9,2,6,8/2,9,2,6,8]	15	3
[7,43]	[7,2,0,9,3,0,2,3,2,5,5,8,1,3,9,5,3,4,8,8,3]	21	1
[7,53]	[4,3,3,9,6,2,2,6,4,1,5,0,9/4,3,3,9,6,2,2,6,4,1,5,0,9/4,3,3,9,6,2,2,6,4,1,,,]	39	3
[7,67]	[4,3,2,8,3,5,8,2,0,8,9,5,5,2,2,3,8,8,0,5,9,7,0,1,4,9,2,5,3,7,3,1,3]	33	1
[7,71]	[7,1,8,3,0,9,8,5,9,1,5,4,9,2,9,5,7,7,4,6,4,7,8,8,7,3,2,3,9,4,3,6,6,1,9/7,,,]	105	3
[7,79]	[8,6,0,7,5,9,4,9,3,6,7,0,8/8,6,0,7,5,9,4,9,3,6,7,0,8,8,6,0,7,5,9,4,9,3,6,,,]	39	3
[7,83]	[2,8,9,1,5,6,6,2,6,5,0,6,0,2,4,0,9,6,3,8,5,5,4,2,1,6,8,6,7,4,6,9,8,7,9,5,,,]	123	3
[7,107]	[8,5,9,8,1,3,0,8,4,1,1,2,1,4,9,5,3,2,7,1,0,2,8,0,3,7,3,8,3,1,7,7,5,7,0,,,]	159	3

A 型の 2 分割和は、
$\frac{k}{p}$ の循環節が右にある回数回並ぶことが観察できる。

定理

A型の2分割和は、$\frac{k}{p}$の循環節が並ぶ。

証明

$g^m \equiv 1 \bmod p,\ g^m \equiv -1 \bmod 7$ のとき

$r_j + r_{j+m} \equiv ag^j + ag^{j+m} \bmod 7 \equiv 0 \bmod 7.$

より $r_j + r_{j+m} = 7k_j$ とかける。

$j = 0$のとき $r_m + r_0 = 7k_0$

$j = m$のとき $r_{2m} + r_m = 7k_m$

周期$u = 2m$より、上の式は $r_0 + r_m = 7k_m$ となる。

よって、 $k_0 = k_m$ となる。

$$
\begin{array}{rcl}
gr_j & = & 7pq_{j+1} + r_{j+1} \\
+)\ gr_{j+m} & = & 7pqj + m + 1 + r_{j+m+1} \\
\hline
g(r_j + r_{j+m}) & = & 7p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + r_{j+1} + rj + m + 1 \\
g7k_j & = & 7p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + 7k_{j+1}
\end{array}
$$

$q_{j+1} + q_{j+m+1} = Q_{j+1}$ とおくと、式は

$$gk_j = pQ_{j+1} + k_{j+1}$$

となる。

$j=1$のとき $gk_0 = pQ_1 + k_1$ $j=2$のとき $gk_1 = pQ_2 + k_2$

$$\vdots$$

$j=m-1$のとき $gk_{m-1} = pQ_m + k_m$

それぞれ、g^{m-1}、g^{m-2}、$\cdots$ 、g^0 をかけて、辺どうしを加えると

$$\begin{array}{rrcc}
 & g^m k_0 & = & pg^{m-1}Q_1 + g^{m-1}k_1 \\
 & g^{m-1}k_1 & = & pg^{m-2}Q_2 + g^{m-2}k_2 \\
 & & \vdots & \\
+) & gk_{m-1} & = & pQ_m + k_m \\
\hline
 & g^m k_0 & = & p(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + k_m
\end{array}$$

$g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$ （2分割和）をZとおくと、式は

$$g^m k_0 = pZ + k_m$$

$$pZ = g^m k_0 - k_m = g^m k_0 - g^m k_0 = k_0(g^m - 1)$$

となり、2分割和は

$$Z = \frac{10^m - 1}{p} k_0$$

となり、$\frac{1}{7p}$ のA型の2分割和には、

$\frac{k_0}{p}$ の循環節が並ぶことが証明された。

4. A 型の2分割差

（例）　分母　$7 * 31$

→循環節 [004608294930875 576036866359447]

Table 3. 2分割和

$$\begin{array}{rr} & 576036866359447 \\ + & 004608294930875 \\ \hline & 580645161290322 \end{array}$$

Table 4. 2分割差

$$\begin{array}{rr} & 576036866359447 \\ - & 004608294930875 \\ \hline & 571428571428572 \end{array}$$

→2分割差

- $\frac{4}{7}$ の循環節（571428）が2回ならぶ。
- 最後は572（$= 571 + 1$）で終わる。

Table 5. A 型の 2 分割差

分母の	2 分割差	長さ	回数
[7,31]	[5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,2]	15	2.5
[7,37]	[8,5,8]	3	0.5
[7,41]	[2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,6]	15	2.5
[7,43]	[7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,5]	21	3.5
[7,53]	[4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,9]	39	6.5
[7,67]	[4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,9]	33	5.5
[7,71]	[7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,,,]	105	6.5
[7,79]	[8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,8]	39	5.5
[7,83]	[2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,,,]	123	20.5
[7,107]	[8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,7,1,4,2,8,5,,,]	159	26.5

A 型の 2 分割差をみると、
$\frac{k}{7}$ の循環節が右の回数だけ繰り返され、最後は
それの半分 $+1$ が足されていることがわかった。

定理

A 型の 2 分割差は、$\frac{k}{7}$ の循環節が数回繰り返され
最後は　半分 $+1$　が足されている。

証明 1

$g^m \equiv 1 \mod p,\ g^m \equiv -1 \mod 7$ のとき

$r_j - r_{j+m} \equiv ag^j - ag^j g^m \equiv 0 \mod p$ より

$r_j - r_{j+m} = pk_j$ とかける。

$j = 0$ のとき $r_0 - r_m = pk_0$

$j = m$ のとき $r_m - r_{2m} = pk_m$

周期 $u = 2m$ より、上の式は $r_m + r_0 = pk_m$ となる。

よって、$k_0 = -k_m$ となる。

$$
\begin{array}{rrcc}
 & gr_j & = & 7pq_{j+1} + r_{j+1} \\
+) & gr_{j+m} & = & 7pqj + m + 1 + r_{j+m+1} \\
\hline
 & g(r_j + r_{j+m}) & = & 7p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + r_{j+1} + rj + m + 1 \\
 & gpk_j & = & 7p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + pk_{j+1}
\end{array}
$$

$q_{j+1} + q_{j+m+1} = S_{j+1}$ とおくと、式は

$$gk_j = 7S_{j+1} + k_{j+1}$$

となる。

$j=1$のとき　$gk_0=7S_1+k_1$ $j=2$のとき　$gk_1=7S_2+k_2$

$$\vdots$$

$j=m-1$のとき　$gk_{m-1}=7S_m+k_m$

それぞれ、g^{m-1}、g^{m-2}、$\cdots$、g^0 をかけて、加えると

$$
\begin{array}{rrcl}
 & g^m k_0 & = & 7g^{m-1}S_1+g^{m-1}k_1 \\
 & g^{m-1}k_1 & = & 7g^{m-2}S_2+g^{m-2}k_2 \\
 & & \vdots & \\
+) & gk_{m-1} & = & 7S_m+k_m \\
\hline
 & g^m k_0 & = & 7(g^{m-1}S_1+g^{m-2}S_2+\cdots+S_m)+k_m
\end{array}
$$

$g^{m-1}S_1 + g^{m-2}S_2 + \cdots + S_m$ （2分割和）をＹとおくと、
式は

$$g^m k_0 = 7Y + k_m$$

$$7Y = g^m k_0 - k_m = g^m k_0 + g^m k_0 = k_0(g^m + 1)$$

となり、2分割差は

$$Y = \frac{10^m + 1}{7} k_0$$

となり、$\frac{1}{7p}$のＡ型の2分割差には、
$\frac{k_0}{7}$の循環節が並ぶことがわかった。

証明2

また、2分割和Zをy_1、y_2の2つに分けて変形すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{g^{2m}-1}{7} &= g^m y_1 + y_2 \\
\frac{g^{2m}-1}{7} &= (g^m-1)y_1 + y_1 + y_2 \\
(g^m+1)(g^m-1) &= 7(g^m-1)y_1 + 7(y_1+y_2) \\
(g^m-1)(g^m+1-7y_1) &= 7(y_1+y_2) \\
g^m+1-7y_1 &= \frac{7(y_1+y_2)}{g^m-1} \\
\frac{g^m+1}{7} &= \frac{y_1+y_2}{g^m-1} + y_1
\end{aligned}
$$

$$
Y = \frac{g^m+1}{7} = 1 + y_1
$$

（$y_1 + y_2 = g^m - 1$ より）となり、

2 分割差には $\frac{k_0}{7}$ の循環節が並び、

最後はそれの半分＋ 1 で終わることがわかった。

5. 分子が一般の場合

（例） 分母 $7 * 17$

→分子1の循環節の2分割和 $[428571\ 428571\ 428571\ 428571]$
→$\frac{3}{7}$の循環節が4回くり返されている。

ここで分母 $7 * 17$ を固定して,
分子を変えていくと次のようになる。

Table 6. $p = 17$ のとき

分数X	Xの循環節の2分割和	第2列を循環節にもつ分数Y
1/7*17	[428571]	3/7
2/7*17	[857142]	6/7
3/7*17	[285714]	2/7
4/7*17	[714285]	5/7
5/7*17	[142857]	1/7
6/7*17	[571428]	4/7
8/7*17	[428571]	3/7
9/7*17	[857142]	6/7
10/7*17	[285714]	2/7
11/7*17	[714285]	5/7
12/7*17	[142857]	1/7
13/7*17	[571428]	4/7
14/7*17	[428571]	3/7
15/7*17	[857142]	6/7
16/7*17	[285714]	2/7
⋮	⋮	⋮

●$p=17$のとき

・分子を変えても循環節の2分割和は、$\frac{k}{7}$の循環節

・さらにそのkも、周期6で循環（$k=3,6,2,5,1,4\cdots$）

●pを変えてみても

・同様に、2分割和のもとの循環小数$\frac{k}{7}$が周期6で循環

→ そこで
サイクルが起こっている分子$a=1$〜6のときについて
pを変えてkについて考えてみる。

Table 7. $\frac{a}{7p}$ の循環節の2分割和を循環節にもつ分数 $\frac{k}{7}$ の分母 k

分子 a ＼ p	$p=17$	$p=29$	$p=61$	$p=73$	$p=89$	$p=97$
1	3	2	6	3	6	5
2	6	4	5	6	5	3
3	2	6	4	2	4	1
4	5	1	3	5	3	6
5	1	3	2	1	2	4
6	4	5	1	4	1	2

分母が $a=j$ のときの k を k_j とおくと、

$$k_1 + k_6 = 7$$
$$k_2 + k_5 = 7$$
$$k_3 + k_4 = 7$$

となっていることがわかった。

一般的にかくと、

$$k_j + k_{j'} = 7$$

$j = a,\ j' = 7 - a$ として j, j' に相補性があるといえる。

6. 今後の課題

B_+ 型の分子が一般のときの2分割和について、
k についての相補性を見つけられたが、
まだ証明までできていないので、これを今後の課題としたい。