分母が 2 のべきの分数の奇数進展開について

島津愛美　西村まどか
学習院大学理学部数学科

2013 年 2 月 2 日

目次

1 研究の目的

はじめに, 次のような例のついて考える. $\frac{1}{7}$ を１０進数展開すると,

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\cdots\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

であり，循環節は [142857] となる.
この節を２分割し，足し合わせると,

$$[142] + [857] = [999] \text{ となる.}$$

$\frac{1}{p}$ を小数に展開したときの循環節の長さが N の倍数ならば，循環節を N 個に分け，それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数を N 分割和と呼ぶこととする.($N = 2$ のときは, 循環節を２分割したうちの大きいほうから小さいほうを引いてできた数を２分割差と呼ぶこととする.)

このように一般に素数 p について，分数 $\frac{1}{p}$ を G 進数展開した循環節の長さが偶数のとき，その循環節を２分割し和を求めると $G-1$ が並ぶことはよく知られている.（例えば，$Midy$ による 1835 年の [1] の論文.）

例：$\frac{1}{7^2}$ を１０進数展開すると,

$$\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} = 0.\underline{\dot{0}2040816326530612244897959183673469387755\dot{1}}$$

であり，この循環節の２分割和を求めると,

$$[020408163265306122448] + [979591836734693877551] = [999999999999999999999].$$

p は３以上の素数とし, 分母が p のべき乗の分数を G 進数展開した循環節の長さが偶数のとき, その循環節の２分割和を求めると $G-1$ が並ぶ.
しかし, 分母が２のべき乗の分数のときだけそれが成り立たない.

本研究では …

[1] $\frac{1}{2^n}(n \geq 3)$ を５進展開したときの２分割和（$pupupu \star list$）
[2] $\frac{1}{2^n}(n \geq 3)$ を５進展開したときの２分割差（$mumumu \star list$）
[3] $\frac{H}{2^n}(n \geq 3, H$ は奇数$)$ を５進展開したときの２分割差（$hahaha \star list$）
[4] $\frac{1}{q \cdot 2^n}(q$ は奇数$)$ を奇数進展開したときの２分割差（$huhehe \star list1, 2, 3, 4$）
[5] $\frac{1}{3^n}(n \geq 3)$ を１０進展開したときの３分割和（$bububu \star list1, 2, 3$）

の性質について研究する.

2 方法

$swi-prolog$ を用いる.

```
/*リストの結合と分離*/
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).


/*特定の要素まで取り出す*/
left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,
N1 is N-1,!,
left(A=B1+[X|C],N1),
append0(B=B1+[X]),!.


/*A/B を A=B*Q+R の形になおす.*/
res_q(A=B*Q+R):-Q is A//B,
R is A-B*Q.


/*循環節と余りのリストを表示*/
lj(A/B,G,L1) :- lj(A/B,G,L1,_).
lj(A/B,G,L1,RL1):- A<B,
lj_aux([A/B,G],A,0,L,[],RL,[]),
reverse(L,L1),reverse(RL,RL1).
write(L1), length(L,Nagai),write(Nagai).


/*補助プログラム*/
lj_aux([A/B,G],A,R,L,L,RL,RL):- R>0,!.
lj_aux(Const,A0,R,L,W,RL1,RL2):-
        Const = [A/B,G],
        A1 is A0 * G,
        res_q(A1 = B*Q + R1),
lj_aux(Const,R1,R1,L,[Q|W],RL1,[R1|RL2]).


/*G 進数での循環節をまとめる*/
j(A/B,G,W):-A<B,
j_aux([A/B,G],A,0,[],W0),
reverse(W0,W).
```

/*与えられた分数 A/B と G 進数の G をまとめて [] でくくる*/

```
j_aux([A/B,G],A,R,W,W):-R>0,!.
j_aux(Const,A0,R,L,W):-Const=[A/B,G],
!,A1 is A0*G,
res_q(A1=B*Q+R1),
       L1=[Q|L],
j_aux(Const,R1,R1,L1,W).
```

/*リストの２分割和*/

```
even_list(W,V+V0):-length(W,K),
K=:=(K//2*2),
K1 is K//2,
left(W=V+V0,K1).
```

/*リストの３分割和*/

```
third_list(W,V+V1+V2):-length(W,K),K=:=(K//3*3),K1 is K//3,
left(W=V+V0,K1),left(V0=V1+V2,K1).
```

/*リストで表記する*/

```
num_list(N,L,G):-N<G,L=[N],!.
num_list(N,L,G):-N1 is N//G,M is N mod G,
num_list(N1,L1,G),
append0(L=L1+[M]).
```

/*リストをはずす*/

```
list_num([N],N,G):-N<G,!.
list_num(L,W,G):-append0(L=L1+[N]),
list_num(L1,N1,G),W is N1*G+N.
```

/*1/N の２分割和*/

```
p_list(N,G):-
j(1/N,G,X),
write(X),nl,
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),list_num(Y2,B,G),
AB is A+B,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),
write(N),put(9),write(L),put(9),write(S),put(9),write(C),
nl.
```

```
/*最大公約数*/
gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):-B1 is A mod B,
A1=B,
gcd(D=(A1,B1)).

/*1/2^n の (n≧ 3) を G 進展開したときの 2 分割和 (pupupu_list)*/
pupupu_list(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/2^N,G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is A+B,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(C),
nl,
fail.
ppp_list(F,E,G).

/*1/2^n(n≧ 3) を G 進展開したときの 2 分割差 (mumumu_list)*/
mumumu_list(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/2^N,G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is B-A,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S), write(C),
nl,
fail.

/*H/2^n(n≧ 3,H は奇数) を G 進展開したときの 2 分割差 (hahaha_list)*/
hahaha_list(N,F,E,G):-for(F=<E,H),
j(H/2^N,G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is abs(B-A),
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(C),
```

```
nl,
fail.

/*1/3・2^n(n≧ 1) を G 進展開したときの 2 分割差 (huhehe_list1)*/
huhehe_list1(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/(3*(2^N)),G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is B-A,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(C),
nl,
fail.

/*1/7・2^n(n≧ 1) を G 進展開したときの 2 分割差 (huhehe_list2)*/
huhehe_list2(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/(7*(2^N)),G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is B-A,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S), write(C),
nl,
fail.

/*1/11・2^n(n≧ 1) を G 進展開したときの 2 分割差 (huhehe_list3)*/
huhehe_list3(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/(11*(2^N)),G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is B-A,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(C),
nl,
fail.
```

```
/*1/13・2^n(n≧ 1)をG進展開したときの2分割差(huhehe_list4)*/
huhehe_list4(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/(13*(2^N)),G,X),
write(X),put(9),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,G),
list_num(Y2,B,G),
AB is B-A,
num_list(AB,C,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(C),
nl,
fail.

/*1/3^n(n≧ 3)をG進展開したときの3分割和(bububu_list1)*/
bububu_list1(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/3^N,G,W),
write(W),put(9),
third_list(W,V+V1+V2),
list_num(V,A,G),
list_num(V1,B,G),
list_num(V2,C,G),
ABC is A+B+C,
num_list(ABC,D,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(D),
nl,
fail.

/*1/5^n(n≧ 3)をG進展開したときの3分割和(bububu_list2)*/
bububu_list2(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/5^N,G,W),
write(W),put(9),
third_list(W,V+V1+V2),
list_num(V,A,G),
list_num(V1,B,G),
list_num(V2,C,G),
ABC is A+B+C,
num_list(ABC,D,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(D),
nl,
fail.
```

```
/*1/7^n(n≧ 3) をG進展開したときの3分割和(bububu_list3)*/
bububu_list3(F,E,G):-for(F=<E,N),
j(1/7^N,G,W),
write(W),put(9),
third_list(W,V+V1+V2),
list_num(V,A,G),
list_num(V1,B,G),
list_num(V2,C,G),
ABC is A+B+C,
num_list(ABC,D,G),
factorize(N,L),length(L,S),write(D),
nl,
fail.


/*分母がJからGまでの単位分数のG進展開における2分割和*/
all_2(I=<J,G):- for(I=<J,P),
gcd(D=(G,P)),
D=:=1,
write(1/P),nl,
p_list(P,G),
fail.
all_2(I=<J,G).


/*AからBまでの値の素因数分解と分母がAからBまでの単位分数のW進展開における2分割和*/
pp_list(A<B,W):- for(A=<B,N),
gcd(M=(W,N)),
M=:=1,
write(N),nl,
       p_list(N,W),
fail.
pp_list(A<B,W).


/* for(最小=<最大,K)*/
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
I1 is I+1,
for(I1=<J,K).
```

```
/*最小因数*/
factor(P/2):-Q is P//2,P=:=2*Q,!.
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),
for(1=<P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
P=:=J1*Q,I=J1,!.
factor(P/P):-!.

/*素因数のリスト*/
factorize(P,[P]):-factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.

/*A から B までの素因数分解のリスト表示*/
prime_list(A<B):-for(A=<B,N),
factorize(N,List),write(N=List),nl,fail.
prime_list(A<B).
```

3　結果

まず, 分母が２のべきの分数の５進数展開における２分割和を考えてみる.

表 1: [1] 分母が２のべきの分数の５進数展開における２分割和 ($pupupu \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割和
3	[0, 3]	[3]
4	[0, 1, 2, 4]	[3, 0]
5	[0, 0, 3, 4, 2, 3, 1, 2]	[2, 4, 0, 1]
6	[0, 0, 1, 4, 3, 4, 0, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 1]	[2, 3, 1, 2, 0, 0, 3, 4]
7	[0, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 1, 3, 3, 4, 3, 3, 0, 4,∼] [∼ 0, 2, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 1, 2, 1, ∼] [∼ 0, 3, 1, 3]	[2, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 1, 0, 0, 1, 4, 3, 4, 0, 3]
8	[0, 0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, 4, 1, 4, 4, 1, 2, 4, ∼] [∼ 2, 3, 3, 4, 1, 0, 4, 3, 4, 3, 0, 3, 3, 0, ∼] [∼ 1, 3, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 3, 2, 3, 1, 4, 2, ∼] [∼ 1, 4, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 0, ∼] [∼ 3, 1, 0, 2, 4, 0, 4]	[2, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 1, 3,∼] [∼ 0, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 1, 3, 3, 4, 3, 3, 0, 4, 0]

表１の結果より, ２分割和のリストの中には０, １, ２, ３, ４が現れ並び方にも規則性がない. したがって, ２分割差を考えてみる.

表 2: [2] 分母が 2 のべきの分数の 5 進数展開における 2 分割差 ($mumumu \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
3	[0, 3]	[3]	0
4	[0, 1, 2, 4]	[2, 3]	1
5	[0, 0, 3, 4, 2, 3, 1, 2]	[2, 2, 2, 3]	3
6	[0, 0, 1, 4, 3, 4, 0, 3, 2, 2, 4, 2, 1,∼] [∼ 1, 3, 1]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	7
7	[0, 0, 0, 4, 4, 2, 0, 1, 3, 3, 4, 3, 3, ∼] [∼ 0, 4, 0, 2, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 4, ∼] [∼ 1, 1, 2, 1, 0, 3, 1, 3]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	15
8		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	31
9		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 3]	63
10		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 3]	127

すると,$n \geq 3$ という条件のもとで考えると
2 分割差のリストは $[2, 2, 2, \cdots\cdots, 2, 3]$ となる.
また, 整列する 2 の個数を $\{a_n\}$ と書くと

$$a_n = 2^{n-3} - 1$$

となることがわかった.

続いて, 先ほどと同じく分母が 2 のべきの分数で, 今度は分子の値（奇数）を動かしたときの 5 進数展開における 2 分割差はどうなるか考えてみる.
n の値を固定して, 分子を動かしていく.（分子は奇数とする.）

表 3: [3] 分母が 2 のべきの分数で分子の値（奇数）を動かしたときの 5 進数展開における 2 分割差 ($n = 3$ のとき）($hahaha \star list$)

H の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
3	[1, 4]	[3]	0
5	[3, 0]	[3]	0
7	[4, 1]	[3]	0

表 4: [3] 分母が 2 のべきの分数で分子の値（奇数）を動かしたときの 5 進数展開における 2 分割差 ($n = 4$ のとき）($hahaha \star list$)

H の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
3	[0,4,3,2]	[2,3]	1
5	[1,2,4,0]	[2,3]	1
7	[2,0,4,3]	[2,3]	1
9	[2,4,0,1]	[2,3]	1
11	[3,2,0,4]	[2,3]	1
13	[4,0,1,2]	[2,3]	1
15	[4,3,2,0]	[2,3]	1

表 5: [3] 分母が 2 のべきの分数で分子の値（奇数）を動かしたときの 5 進数展開における 2 分割差 ($n = 5$ のとき）($hahaha \star list$)

H の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
3	[0,2,1,3,2,4,4,1]	[2,2,2,3]	3
5	[0,3,4,2,3,1,2,0]	[2,2,2,3]	3
7	[1,0,2,1,3,2,4,4]	[2,2,2,3]	3
9	[1,2,0,0,3,4,2,3]	[2,2,2,3]	3
11	[1,3,2,4,4,1,0,2]	[2,2,2,3]	3
13	[2,0,0,3,4,2,3,1]	[2,2,2,3]	3
15	[2,1,3,2,4,4,1,0]	[2,2,2,3]	3
17	[2,3,1,2,0,0,3,4]	[2,2,2,3]	3
19	[2,4,4,1,0,2,1,3]	[2,2,2,3]	3
21	[3,1,2,0,0,3,4,2]	[2,2,2,3]	3
23	[3,2,4,4,1,0,2,1]	[2,2,2,3]	3
25	[3,4,2,3,1,2,0,0]	[2,2,2,3]	3
27	[4,1,0,2,1,3,2,4]	[2,2,2,3]	3
29	[4,2,3,1,2,0,0,3]	[2,2,2,3]	3
31	[4,4,1,0,2,1,3,2]	[2,2,2,3]	3

表 6: [3] 分母が 2 のべきの分数で分子の値（奇数）を動かしたときの 5 進数展開における 2 分割差 ($n = 6$ のとき）($hahaha \star list$)

H の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
3	[0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
5	[0,1,4,3,4,0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
7	[0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
9	[0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
11	[0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
13	[1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2,4,2,1,1,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
15	[1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
17	[1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2,4,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
19	[1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
21	[1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2,4,2,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
23	[1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
25	[1,4,3,4,0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
27	[2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
29	[2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
31	[2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
33	[2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
35	[2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
37	[2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
39	[3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
41	[3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2,4,2,1,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
43	[3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
45	[3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
47	[3,3,1,3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
49	[3,4,0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
51	[3,4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
53	[4,0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
55	[4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4,4,3,0,1,0]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
57	[4,2,1,1,3,1,0,0,1,4,3,4,0,3,2,2]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
59	[4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3,4]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
61	[4,3,4,0,3,2,2,4,2,1,1,3,1,0,0,1]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7
63	[4,4,3,0,1,0,4,1,2,2,0,2,3,3,1,3]	[2,2,2,2,2,2,2,3]	7

結果として, 整列する 2 の個数を $\{a_n\}$ と書くと,$\underline{a_n = 2^{n-3} - 1}$ となり,
分子の値が分母の値を超えない限り, 分子の値によらない ことがわかった.

次に, 分母が 2 のべきと q(q は奇数) の積である分数の 5 進数展開における 2 分割差をとってみるとどうなるか.
5 進数だけでなく, 7 進数・ 9 進数展開においても調べてみた.
{考察} では, このうちの分母が 2 のべきと 3 の積である分数の 5 進数展開における 2 分割差の証明を考える.

表 7: [4] 分母が 2 のべきと 3 の積である分数の 5 進数展開における 2 分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
1	[0, 4]	[4]	0
2	[0, 2]	[2]	0
3	[0, 1]	[1]	0
4	[0, 0, 2, 3]	[2, 3]	1
5	[0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4]	[2, 2, 2, 3]	3
6	[0, 0, 0, 3, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 3, 0, 3, ∼] [∼ 3, 4, 2]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	7
7	[0, 0, 0, 1, 3, 0, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 4, ∼] [∼ 1, 4, 3, 2, 2, 2, 4, 0, 3, 0, 4, ∼] [∼ 3, 3, 4, 0, 1, 4, 2, 1]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	15
8		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	31
9		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	63
10		[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 3]	127

表 8: [4] 分母が 2 のべきと 7 の積である分数の 5 進数展開における 2 分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
1	[0, 1, 3, 4, 3, 1]	[4, 1, 3]	0
2	[0, 0, 4, 2, 1, 3]	[2, 0, 4]	0
3	[0, 0, 2, 1, 0, 4]	[1, 0, 2]	0
4	[0, 0, 1, 0, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 0, 2]	[2, 2, 2, 2, 2, 3]	5
5	[0, 0, 0, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 1, 2, 3, 2, 2, 3, ∼] [∼ 0, 1, 2, 1, 1, 1, 4, 0, 1]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	11
6	[0, 0, 0, 1, 1, 4, 4, 1, 4, 3, 1, 1, 3, 3, 4,∼] [∼ 0, 0, 3, 3, 0, 3, 2, 0, 0, 2, 2, 2, 3,∼] [∼ 4, 2, 1, 4, 2, 0, 3, 4, 1, 1, 1, 2, 3,∼] [∼ 1, 0, 3, 0, 4, 2, 3]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	23
7	[0, 0, 0, 0, 3, 2, 2, 0, 4, 4, 0, 3, 1, 4, 2,∼] [∼ 0, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4,∼] [∼ 2, 1, 0, 4, 3, 2, 4, 2, 0, 3, 0, 3, 4,∼] [∼ 0, 2, 4, 0, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 0, 4,∼] [∼ 4, 3, 2, 1, 3, 0, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 1,∼] [∼ 2, 4, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 3, 3, 2,∼] [∼ 1, 0, 1, 4, 3, 0, 3, 1, 1, 3, 0, 1, 2,∼] [∼ 4, 3, 4]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 3]	47
8	[0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 4, 0, 4, 3,∼] [∼ 2, 2, 3, 2, 0, 0, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 4,∼] [∼ 3, 3, 0, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 4, 0, 1, 4,∼] [∼ 2, 3, 4, 2, 3, 3, 0, 3, 3, 3, 4, 0, 2,∼] [∼ 2, 1, 3, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 0,∼] [∼ 3, 4, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 3, 2, 1, 4, 1,∼] [∼ 0, 2, 3, 2, 1, 2, 4, 0, 3, 1, 2, 3, 1,∼] [∼ 2, 1, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 0, 2, 2,∼] [∼ 0, 1, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 4, 2, 3, 1, 3,∼] [∼ 3, 4, 1, 4, 2, 1, 0, 2, 4, 4, 1, 2, 1,∼] [∼ 0, 1, 2, 4, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 0, 3, 1,∼] [∼ 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 1, 0, 4, 0, 2, 0,∼] [∼ 4, 3, 3, 4, 3, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 0, 3,∼] [∼ 0, 4, 4, 1, 3, 3, 0, 0, 4, 4, 0, 1, 3,∼] [∼S 0, 4, 0, 0, 3, 4, 4, 2]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	95

表 9: [4] 分母が２のべきと１１の積である分数の５進数展開における２分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
1	[0, 1, 0, 3, 2]	[0, 0, 2, 4, 1]	0
2	[0, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 4, 3]	[2, 2, 2, 2, 3]	4
3	[0, 0, 0, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 0,∼] [∼ 1, 1, 1, 4, 4]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	9
4	[0, 0, 0, 1, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 0,∼] [∼ 0, 3, 0, 4, 4, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 4, 2,∼] [∼ 1, 0, 3, 3, 4, 0, 2, 3, 0, 3, 2, 2]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	19
5	[0, 0, 0, 0, 4, 2, 0, 4, 4, 1, 3, 0, 3, 1, 2,∼] [∼ 2, 4, 0, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 0, 3, 2, 1,∼] [∼ 0, 2, 4, 1, 4, 2, 3, 4, 0, 1, 3, 3, 2,∼] [∼ 2, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 0, 3, 0, 4,∼] [∼ 0, 0, 1, 2, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 3, 0, 4,∼] [∼S 3, 3, 0, 1, 4, 2, 0, 1, 1, 2, 4, 1, 1]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2,2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 3]	39

表 10: [4] 分母が２のべきと１１の積である分数の７進数展開における２分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	3 の個数
1	[0, 2, 1, 4, 0, 6, 4, 5, 2, 6]	[6, 2, 3, 5, 6]	0
2	[0, 1, 0, 5, 3, 6, 5, 6, 1, 3]	[6, 4, 5, 3, 0]	0
3	[0, 0, 3, 6, 1, 6, 6, 3, 0, 5]	[6, 5, 6, 1, 4]	0
4	[0, 0, 1, 6, 4, 3, 3, 1, 3, 6]	[3, 2, 6, 4, 2]	0
5	[0, 0, 0, 6, 5, 5, 1, 4, 1, 6, 3, 3, 4, 3, ∼] [∼2, 1, 5, 0, 5, 3]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	9
6	[0, 0, 0, 3, 2, 6, 0, 5, 4, 3, 1, 5, 2, 1,∼] [∼ 4, 4, 2, 3, 6, 1, 3, 3, 3, 6, 6, 2,∼] [∼ 4, 2, 0, 6, 5, 1, 5, 5, 1, 0, 6, 0,∼] [∼ 2, 5]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	19
7	[0, 0, 0, 1, 4, 6, 3, 6, 2, 1, 4, 2, 4, 4,∼] [∼ 2, 2, 1, 1, 6, 4, 1, 5, 1, 6, 6, 4,∼] [∼ 5, 4, 3, 6, 6, 0, 6, 2, 4, 0, 3, 0,∼] [∼ 1, 2, 3, 3, 3, 5, 1, 3, 0, 2, 5, 5,∼] [∼ 0, 6, 1, 0, 5, 5, 4, 5, 3, 0, 5, 1,∼] [∼ 5, 3, 3, 1, 2, 1, 0, 3, 2, 4, 2, 6,∼] [∼ 0, 3, 6, 3, 4, 6]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	39
8	[0, 0, 0, 0, 5, 6, 5, 3, 1, 0, 5, 4, 5, 5,∼] [∼ 4, 4, 4, 0, 6, 5, 4, 2, 4, 3, 3, 2,∼] [∼ 2, 5, 5, 3, 3, 0, 3, 1, 2, 0, 1, 3,∼] [∼ 4, 1, 1, 5, 1, 6, 0, 5, 0, 1, 2, 6,∼] [∼ 0, 3, 0, 3, 6, 2, 5, 6, 1, 3, 6, 0,∼] [∼ 6, 1, 5, 0, 4, 4, 0, 1, 4, 5, 4, 6,∼] [∼ 3, 5, 3, 1, 5, 6, 3, 3, 3, 4, 2, 3,∼] [∼ 1, 6, 4, 4, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 4,∼] [∼ 3, 2, 0, 6, 0, 6, 6, 5, 6, 2, 1, 6,∼] [∼ 6, 3, 6, 4, 5, 3, 5, 0, 0, 4, 5, 1,∼] [∼ 5, 2, 4, 1, 3, 4, 6, 2, 3, 6, 4, 0,∼] [∼ 2, 6, 2, 2, 5, 0, 2, 4, 2, 5, 1, 4,∼] [∼ 1, 0, 3, 5, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 6, 5,∼] [∼ 2, 3]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3,3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	79

表 11: [4] 分母が２のべきと１３の積である分数の５進数展開における２分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	2 の個数
1	[0, 0, 4, 4]	[4, 4]	0
2	[0, 0, 2, 2]	[2, 2]	0
3	[0, 0, 1, 1]	[1, 1]	0
4	[0, 0, 0, 3]	[3]	0
5	[0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 4]	[2, 2, 2, 3]	3
6	[0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 2, 3, 1, 1,∼] [∼ 1, 2]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	7
7	[0, 0, 0, 0, 1, 4, 1, 4, 3, 3, 3, 4, 0, 3,∼] [∼ 0, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 1, 1,∼] [∼ 1, 1, 3, 0, 3, 1]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3]	15
8	[0, 0, 0, 0, 0, 4, 3, 2, 1, 4, 1, 4, 2, 4, ∼] [∼ 0, 1, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 3,∼] [∼ 0, 3, 1, 2, 4, 0, 2, 2, 2, 2, 3, 2,∼] [∼ 0, 4, 4, 1, 4, 2, 0, 1, 2, 4, 1, 1,∼] [∼ 1, 1, 2, 0, 4, 3, 3, 0, 3, 0, 4, 0, ∼] [∼ 1, 3]	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,∼] [∼ 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ∼] [∼ 2, 2, 2, 3]	31

表 12: [4] 分母が 2 のべきと 1 3 の積である分数の 7 進数展開における 2 分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	3 の個数
1	[0, 1, 6, 1, 2, 2, 6, 5, 0, 5, 4, 4]	[6, 3, 1, 4, 2, 2]	0
2	[0, 0, 6, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 6, 2, 2]	[3, 1, 4, 2, 1, 1]	0
3	[0, 0, 3, 2, 0, 4, 1, 4, 5, 3, 1, 1]	[1, 4, 2, 1, 0, 4]	0
4	[0, 0, 1, 4, 3, 5, 4, 2, 2, 5, 0, 4]	[4, 2, 1, 0, 3, 6]	0
5	[0, 0, 0, 5, 5, 2, 5, 4, 4, 6, 0, 2]	[5, 4, 4, 0, 2, 0]	0
6	[0, 0, 0, 2, 6, 1, 2, 5, 5, 6, 3, 4, 3, 3,∼] [∼ 3, 6, 2, 4, 6, 2, 2, 3, 0, 1]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	11
7	[0, 0, 0, 1, 3, 0, 4, 6, 2, 6, 5, 2, 1, 5,∼] [∼ 1, 6, 4, 5, 6, 4, 4, 5, 0, 0, 3, 3,∼] [∼ 3, 4, 6, 4, 1, 2, 6, 3, 1, 5, 5, 1,∼] [∼ 5, 3, 1, 2, 3, 1, 1, 1, 3, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4]	23
8	[0, 0, 0, 0, 5, 0, 2, 3, 1, 3, 2, 4, 4, 2,∼] [∼ 4, 3, 2, 2, 6, 5, 5, 6, 0, 0, 1, 5,∼] [∼ 1, 5, 6, 5, 4, 1, 3, 1, 4, 2, 6, 0,∼] [∼ 6, 1, 4, 1, 1, 4, 0, 4, 1, 5, 3, 3,∼] [∼ 3, 4, 1, 3, 5, 6, 4, 6, 6, 1, 0, 6,∼] [∼ 0, 6, 5, 6, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 1,∼] [∼ 5, 2, 3, 2, 0, 4, 6, 5, 0, 6, 2, 4,∼] [∼ 5, 0, 4, 0, 5, 2]	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ∼] [∼ 3, 3, 3, 3, 3, 4]	47

表 13: [4] 分母が２のべきと１３の積である分数の９進数展開における２分割差 ($huhehe \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割差	4 の個数
4	[0, 0, 3, 4, 4, 8]	[4, 4, 5]	2
5	[0, 0, 1, 6, 6, 8, 4, 4, 6, 2, 2, 4]	[4, 4, 4, 4, 4, 5]	5
6	[0, 0, 0, 7, 7, 8, 6, 6, 7, 5, 5, 6, 4, 4,∼] [∼ 5, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 1, 2]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5]	11
7	[0, 0, 0, 3, 8, 4, 3, 3, 3, 7, 2, 7, 6, 6,∼] [∼ 7, 1, 6, 2, 1, 1, 1, 5, 0, 5, 4, 4,∼] [∼ 4, 8, 3, 8, 7, 7, 8, 2, 7, 3, 2, 2,∼] [∼ 2, 6, 1, 6, 5, 5, 6, 0, 5, 1]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,∼] [∼ 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5]	23
8	[0, 0, 0, 1, 8, 6, 6, 1, 6, 3, 5, 8, 3, 3,∼] [∼ 3, 5, 3, 1, 0, 5, 0, 7, 0, 2, 6, 6,∼] [∼ 6, 8, 6, 4, 3, 8, 4, 1, 3, 6, 1, 1,∼] [∼ 1, 3, 0, 7, 7, 2, 7, 4, 7, 0, 4, 4,∼] [∼ 4, 6, 4, 2, 1, 6, 1, 8, 1, 3, 7, 7,∼] [∼ 8, 0, 7, 5, 5, 0, 5, 2, 4, 7, 2, 2,∼] [∼ 2, 4, 1, 8, 8, 3, 8, 5, 8, 1, 5, 5,∼] [∼ 5, 7, 5, 3, 2, 7, 3, 0, 2, 5]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,∼] [∼ 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ∼] [∼ 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ∼] [∼ 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5]	47

表７～表１３の結果より,

２分割差のリストは,n が大きくなるといずれは

$[2,2,2,\cdots,2,3]$（５進数展開）

$[3,3,3,\cdots,3,4]$（７進数展開）

$[4,4,4,\cdots,4,5]$（９進数展開）

のようになることがわかった.

※ $q=3$ のときは,[1] 分母が２のべきの分数の５進数展開における２分割差の２の個数と全く同じになった.

今度は, 分母が３のべきの分数の１０進数展開における３分割和をとるとどうなるか考える.

表 14: [5] 分母が３のべきの分数の１０進数展開における３分割和 ($bububu \star list$)

n の値	循環節（リスト）	分割和
3	[0, 3, 7]	[1, 0]
4	[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9]	[1, 0, 3, 6]
5	[0, 0, 4, 1, 1, 5, 2, 2, 6, 3, 3, 7, 4, 4, 8, 5, 5, 9, 6, ∼] [∼7, 0, 7, 8, 1, 8, 9, 3]	[1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
6	[0, 0, 1, 3, 7, 1, 7, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 8, 2, 8, 5, 3, 2,∼] [∼ 2, 3, 5, 9, 3, 9, 6, 4, 3, 3, 4, 7, 0, 5, 0, 7, 5,∼] [∼ 4, 4, 5, 8, 1, 6, 1, 8, 6, 5, 5, 6, 9, 2, 7, 2, 9,∼] [∼ 7, 6, 6, 8, 0, 3, 8, 4, 0, 8, 7, 7, 9, 1, 4, 9, 5,∼] [∼ 1, 9, 8, 9, 0, 2, 6, 0, 6, 3, 1]	[1, 0, 0, 4, 1, 1, 5, 2, 2, 6, 3, 3, 7, 4, 4,∼] [∼ 8, 5, 5, 9, 6, 7, 0, 7, 8, 1, 8, 9, 2]
7	[0, 0, 0, 4, 5, 7, 2, 4, 7, 3, 7, 0, 8, 2, 7, 6, 1, 7, 7,∼] [∼ 4, 1, 1, 9, 7, 9, 8, 8, 1, 1, 1, 5, 6, 8, 3, 5, 8,∼] [∼ 4, 8, 1, 9, 3, 8, 7, 2, 8, 8, 5, 2, 3, 0, 9, 0, 9,∼] [∼ 9, 2, 2, 2, 6, 7, 9, 4, 6, 9, 5, 9, 3, 0, 4, 9, 8,∼] [∼ 3, 9, 9, 6, 3, 4, 2, 0, 2, 1, 0, 3, 3, 3, 7, 9, 0,∼] [∼ 5, 8, 0, 7, 0, 4, 1, 6, 0, 9, 5, 1, 0, 7, 4, 5, 3,∼] [∼ 1, 3, 2, 1, 4, 4, 4, 9, 0, 1, 6, 9, 1, 8, 1, 5, 2,∼] [∼ 7, 2, 0, 6, 2, 1, 8, 5, 6, 4, 2, 4, 3, 2, 5, 5, 6,∼] [∼ 0, 1, 2, 8, 0, 2, 9, 2, 6, 3, 8, 3, 1, 7, 3, 2, 9,∼] [∼ 6, 7, 5, 3, 5, 4, 3, 6, 6, 7, 1, 2, 3, 9, 1, 4, 0,∼] [∼ 3, 7, 4, 9, 4, 2, 8, 4, 4, 0, 7, 8, 6, 4, 6, 5, 4,∼] [∼ 7, 7, 8, 2, 3, 5, 0, 2, 5, 1, 4, 8, 6, 0, 5, 3, 9,∼] [∼ 5, 5, 1, 8, 9, 7, 5, 7, 6, 5, 8, 8, 9, 3, 4, 6, 1,∼] [∼ 3, 6, 2, 5, 9, 7, 1, 6, 5, 0, 6, 6, 3, 0, 0, 8, 6,∼] [∼ 8, 7, 7]	[1, 0, 0, 1, 3, 7, 1, 7, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 8, 2, ∼] [∼ 8, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 9, 3, 9, 6, 4, 3, 3,∼] [∼ 4, 7, 0, 5, 0, 7, 5, 4, 4, 5, 8, 1, 6, 1,∼] [∼ 8, 6, 5, 5, 6, 9, 2, 7,2, 9, 7, 6, 6, 8, ∼] [∼ 0, 3, 8, 4, 0, 8, 7, 7, 9, 1, 4,9, 5, 1, ∼] [∼ 9, 8, 9, 0, 2, 6, 0, 6, 3, 0]

表１４の結果より, ３分割和のリストの中には０～９までの数字が現れ並び方にも規則性がないことがわかった.

4 考察

既約分数 $\dfrac{a}{b}$ を考える. 正の数 $g > 1$ を決め, 分数を g 進数として展開する. ただし,g と b は互いに素とし,$\dfrac{a}{b}$ は既約分数より,a と b は互いに素. 以下,$\dfrac{a}{b}$ を真分数とし, 証明を進める.

☒ $\dfrac{1}{2^n}(n \geq 3)$ を５進展開したときの２分割差（$mumumu \star list$）の性質の証明

$a = 1, b = 2^n, g = 5, n \geq 3$
とおく. 周期を $u = 2^{n-2}$ とする.
$m = \dfrac{u}{2} = \dfrac{2^{n-2}}{2} = 2^{n-3}$
$5^u \equiv 1 \bmod b \Longleftrightarrow 5^{2^{n-2}} \equiv 1 \bmod b$
商を q_j, 余りを r_j とおく.

◎ $5r_j = q_{j+1}2^n + r_{j+1} \cdots$ ☒
◎ $5r_{j+m} = q_{j+m+1}2^n + r_{j+m+1} \cdots$ ☒

☒ $-$ ☒より,
$5(r_{j+m} - r_j) = 2^n(q_{j+m+1} - q_{j+1}) + (r_{j+m+1} - r_{j+1}) \cdots$（＊）

ここで,
$5 = 2^2 + 1$ より,
$5^m - 1$
$= (2^2+1)^m - 1$
$=_m C_0 2^{2m} +_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots +_m C_{m-1} 2^2 +_m C_m 2^0 - 1$
$=_m C_0 2^{2m} +_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots + m2^2 + 1 - 1$
$=_m C_0 2^{2m} +_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots + 2^{n-1}$
$= 2^n(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) + 2^{n-1}$
以上より,$5^m - 1 \equiv 2^{n-1} \bmod b \cdots$（＊＊）

また,$r_j \equiv g^j a \bmod b$ より,
$r_{j+m} \equiv g^{j+m} a = g^m g^j a \equiv g^m r_j \bmod b$
よって,$r_{j+m} \equiv 5^m r_j \bmod b$

両辺から r_j を引く.
$r_{j+m} - r_j$
$\equiv 5^m r_j - r_j \bmod b$
$\equiv r_j(5^m - 1) \bmod b$
$\equiv r_j 2^{n-1} \bmod b$（(＊＊)）
$\equiv \varepsilon_j 2^{n-1} \bmod b$
以上より,$r_{j+m} - r_j = \varepsilon_j 2^{n-1} + k_j 2^n$ と書ける.

$r_{j+m} < 2^n, r_j < 2^n$ であるので,$-2^n < r_{j+m} - r_j < 2^n \cdots$ ⊠である.
ここで,$\varepsilon_j = 0$ とすると,
$r_{j+m} - r_j \equiv 0 \bmod b$
$r_j(5^m - 1) \equiv 0 \bmod b$
$r_j \neq 0 \bmod b$ より
$5^m - 1 \equiv 0 \bmod b$
$5^m \equiv 1 \bmod b$ となり,m が周期となるので矛盾する.

よって,$\varepsilon_j = \pm 1$
また⊠より,$k_j = 0$

ゆえに,$r_{j+m} - r_j = \varepsilon_j 2^{n-1} \cdots$ ⊠
⊠の式において,
$r_0 = 1$ より,
$j = 0$ とすると,$r_m - r_0 = \varepsilon_0 2^{n-1}$
　$r_m - 1 = \varepsilon_0 2^{n-1}$
　$r_m - 1 > 0$ より,$\varepsilon_0 = 1$
ゆえに,$r_m - r_0 = 2^{n-1}$
$j = m$ とすると,$r_{2m} - r_m = r_0 - r_m = \varepsilon_m 2^{n-1}$
二式より,$-2^{n-1} = \varepsilon_m 2^{n-1}$
よって,$\varepsilon_m = -1$

$(*)$ において,$S_{j+1} = q_{j+m+1} - q_{j+1}$ とすると,
$5\varepsilon_j 2^{n-1} = 2^n S_{j+1} + \varepsilon_{j+1} 2^{n-1}$ と書ける.

両辺 2^{n-1} で割ると,
$5\varepsilon_j = 2S_{j+1} + \varepsilon_{j+1}$

$j = 0, 1, 2, \cdots, (m-1)$ において,

$$\begin{aligned}
5\varepsilon_0 &= 2S_1 + \varepsilon_1 \\
5\varepsilon_1 &= 2S_2 + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
5\varepsilon_{m-2} &= 2S_{m-1} + \varepsilon_{m-1} \\
5\varepsilon_{m-1} &= 2S_m + \varepsilon_m
\end{aligned}$$

と表すことができる.

また,

$$\begin{aligned}
5^m\varepsilon_0 &= 2 \cdot 5^{m-1} S_1 + 5^{m-1}\varepsilon_1 \\
5^{m-1}\varepsilon_1 &= 2 \cdot 5^{m-2} S_2 + 5^{m-2}\varepsilon_2 \\
&\vdots \\
5^2\varepsilon_{m-2} &= 2 \cdot 5 S_{m-1} + 5\varepsilon_{m-1} \\
5\varepsilon_{m-1} &= 2S_m + \varepsilon_m
\end{aligned}$$

より, これらの両辺をそれぞれ足すと,

$5^m\varepsilon_0 = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) + \varepsilon_m$
$5^m = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) - 1$
$5^m = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) + 1 - 2$
$5^m - 1 = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5 - 2$

$5^m - 1 = (5-1)(5^{m-1} + \cdots + 1)$ であるので,
$4(5^{m-1} + \cdots + 1) = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5 - 2$
$\langle 4, 4, 4, \cdots, 4\rangle_5 + 2 = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$

両辺 2 で割って,
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 2\rangle_5 + 1 = \langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 3\rangle_5 = \langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$

[証明終]

⊠　$\dfrac{H}{2^n}(n \geq 3, H$ は奇数$)$ を５進展開したときの２分割差（$hahaha \star list$）の性質の証明

$a = H, b = 2^n, g = 5, n \geq 3, H < 2^n$
とおく. 周期を $u = 2^{n-2}$ とする.
$m = \dfrac{u}{2} = \dfrac{2^{n-2}}{2} = 2^{n-3}$
$5^u \equiv 1 \bmod b \Longleftrightarrow 5^{2^{n-2}} \equiv 1 \bmod b$
商を q_j, 余りを r_j とおく.

◎ $5r_j = q_{j+1}2^n + r_{j+1} \cdots$ ⊠
◎ $5r_{j+m} = q_{j+m+1}2^n + r_{j+m+1} \cdots$ ⊠

⊠ − ⊠より,
$5(r_{j+m} - r_j) = 2^n(q_{j+m+1} - q_{j+1}) + (r_{j+m+1} - r_{j+1}) \cdots$（＊）

ここで,
$5 = 2^2 + 1$ より,
$5^m - 1$
$= (2^2 + 1)^m - 1$
$= {}_m C_0 2^{2m} + {}_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots + {}_m C_{m-1} 2^2 + {}_m C_m 2^0 - 1$
$= {}_m C_0 2^{2m} + {}_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots + m2^2 + 1 - 1$
$= {}_m C_0 2^{2m} + {}_m C_1 2^{2(m-1)} + \cdots + 2^{n-1}$
$= 2^n(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots) + 2^{n-1}$
以上より,$5^m - 1 \equiv 2^{n-1} \bmod b \cdots$（＊＊）

また,$r_j \equiv g^j H \bmod b$ より,
$r_{j+m} \equiv g^{j+m}H = g^m g^j H \equiv g^m r_j \bmod b$
よって,$r_{j+m} \equiv 5^m r_j \bmod b$

両辺から r_j を引く.
$r_{j+m} - r_j$
$\equiv 5^m r_j - r_j \bmod b$
$\equiv r_j(5^m - 1) \bmod b$
$\equiv r_j 2^{n-1} \bmod b$（(＊＊)）
$\equiv \varepsilon_j 2^{n-1} \bmod b$
以上より,$r_{j+m} - r_j = \varepsilon_j 2^{n-1} + k_j 2^n$ と書ける.

$r_{j+m} < 2^n, r_j < 2^n$ であるので,$-2^n < r_{j+m} - r_j < 2^n \cdots$ ⊠である.
ここで,$\varepsilon_j = 0$ とすると,
$r_{j+m} - r_j \equiv 0 \bmod b$
$r_j(5^m - 1) \equiv 0 \bmod b$
$r_j \neq 0 \bmod b$ より
$5^m - 1 \equiv 0 \bmod b$

$5^m \equiv 1 \bmod b$ となり,m が周期となるので矛盾する.

よって,$\varepsilon_j = \pm 1$
また☒より,$k_j = 0$

今回は, 2 分割差を求める際に絶対値を用いて, 循環節を 2 分割したうちの
大きいほうから小さいほうを引いて差を求めているため,
結果的に,
　　$\varepsilon_j = 1$ となることがわかる.

$r_0 = 1$ より,
$j = 0$ とすると,$r_m - r_0 = \varepsilon_0 2^{n-1}$
　$r_m - 1 = \varepsilon_0 2^{n-1}$
　$r_m - 1 > 0$ より,$\varepsilon_0 = 1$
ゆえに,$r_m - r_0 = 2^{n-1}$
$j = m$ とすると,$r_{2m} - r_m = r_0 - r_m = \varepsilon_m 2^{n-1}$
二式より,$-2^{n-1} = \varepsilon_m 2^{n-1}$
よって,$\varepsilon_m = -1$

$(*)$ において,$S_{j+1} = q_{j+m+1} - q_{j+1}$ とすると,
$5\varepsilon_j 2^{n-1} = 2^n S_{j+1} + \varepsilon_{j+1} 2^{n-1}$ と書ける.

両辺 2^{n-1} で割ると,
$5\varepsilon_j = 2S_{j+1} + \varepsilon_{j+1}$

$j = 0, 1, 2, \cdots, (m-1)$ において,

$$\begin{aligned}
5\varepsilon_0 &= 2S_1 + \varepsilon_1 \\
5\varepsilon_1 &= 2S_2 + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
5\varepsilon_{m-2} &= 2S_{m-1} + \varepsilon_{m-1} \\
5\varepsilon_{m-1} &= 2S_m + \varepsilon_m
\end{aligned}$$

と表すことができる.
また,

$$\begin{aligned}
5^m\varepsilon_0 &= 2 \cdot 5^{m-1} S_1 + 5^{m-1}\varepsilon_1 \\
5^{m-1}\varepsilon_1 &= 2 \cdot 5^{m-2} S_2 + 5^{m-2}\varepsilon_2 \\
&\vdots \\
5^2\varepsilon_{m-2} &= 2 \cdot 5 S_{m-1} + 5\varepsilon_{m-1} \\
5\varepsilon_{m-1} &= 2S_m + \varepsilon_m
\end{aligned}$$

より, これらの両辺をそれぞれ足すと,

$$5^m\varepsilon_0 = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) + \varepsilon_m$$
$$5^m = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) - 1$$
$$5^m = 2(5^{m-1}S_1 + 5^{m-2}S_2 + \cdots + 5S_{m-1} + S_m) + 1 - 2$$
$$5^m - 1 = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5 - 2$$

$5^m - 1 = (5-1)(5^{m-1} + \cdots + 1)$ であるので,
$4(5^{m-1} + \cdots + 1) = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5 - 2$
$\langle 4, 4, 4, \cdots, 4\rangle_5 + 2 = 2\langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$

両辺 2 で割って,
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 2\rangle_5 + 1 = \langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 3\rangle_5 = \langle S_1, S_2 \cdots, S_m\rangle_5$

[証明終]

⊠ $\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$ を５進展開したときの２分割差（$huhehe\star list1$）の性質の証明

$a=1, b=3\cdot 2^n, g=5, n\geq 4$ とおく.
周期を $u=2^{n-2}$ とする.
$m=\dfrac{u}{2}=\dfrac{2^{n-2}}{2}=2^{n-3}$

$5^u\equiv 1 \bmod 2^n\cdots$ ⊠

ここで,$u=2^{n-3}\cdot 2$ より,$2^{n-3}=B$ とおくと,$u=2B$
$5^u-1=(5^2)^B-1=(5^2-1)(5^2B-1+5^2B-2+\cdots+1)$
$=24(5^2B-1+5^2B-2+\cdots+1)\equiv 0 \bmod 3$
ならば,$5^u\equiv 1 \bmod 3\cdots$ ⊠

⊠⊠より,$5^u\equiv 1 \bmod b$ である.$\cdots(\ast)$

一方,$5^m\equiv 1 \bmod b$ は周期が n なので成り立たない.

また,$m=2^{n-4}\cdot 2$ より,$2^{n-4}=C$ とおくと,$u=2C$
$5^m-1=(5^2)^C-1=(5^2-1)(5^2C-1+5^2C-2+\cdots+1)$
$\quad\quad=24(5^2C-1+5^2C-2+\cdots+1)\equiv 0 \bmod 3$
ならば,$5^m\equiv 1 \bmod 3$
よって,$5^m\equiv 1 \bmod 3$ である.

$5=2^2+1$ より,
$5^u=5^{2n-2}=(2^2+1)^{2n-2}=2^nL_1+1$ と書ける.
⊠より,2^nL_1は３の倍数なので,$L_1=3K_1$となる.

$5^m=5^{2n-3}=(2^2+1)^{2n-3}=2^{n-1}L_2+1$ と書ける.
$(\ast\ast)$ より,$2^{n-1}L_2$は３の倍数なので,$L_2=3K_2$となる.

$5^u\equiv 1 \bmod b, 5^m\equiv 1 \bmod 2^{n-1}, 5^m\equiv 1 \bmod 3$ より,
$5^m\equiv 1 \bmod 3\cdot 2^{n-1}$
ここで,$3\cdot 2^{n-1}=b_1$とおくと,
$5^m\equiv 1 \bmod b_1$
ゆえに,$5^m-1\equiv 0 \bmod b_1$であるので,
$5^m-1=b_1K$ と書ける.

$r_j\equiv 5^j \bmod b$
$r_{j+m}\equiv 5^{j+m}\equiv 5^j\cdot 5^m\equiv r_j\cdot 5^m \bmod b$
両辺から r_jを引いて,
$r_{j+m}-r_j\equiv r_j\cdot 5^m-r_j\equiv r_j(5^m-1) \bmod b$

$S_j \equiv r_j(5^m - 1) \bmod b = r_j b_1 K$
ここで, $r_j K = E_j$ とおくと, $S_j = E_j b_1$

$(i)E_j$ が偶数なら, $E_j b_1 \equiv 0 \bmod b$
$(ii)E_j$ が奇数なら, $E_j = 2k+1$ と表せ, $E_j b_1 = (2k+1)b_1 = kb + b_1 \equiv b_1 \bmod b$

さらに, $r_j < b, r_{j+m} < b$ より, $-b < S_j < b$
また, $S_j = 0$ ならば, $r_{j+m} = r_j$ より, 矛盾し, $S_j \neq 0$
以上より, E_j は奇数となり, $S_j \equiv b_1 \bmod b$

$-b < S_j < b$ より, $-2b_1 < E_j b_1 < 2b_1$
$-2 < E_j < 2$
E_j は整数より, $-1 \leq E_j \leq 1$ と, $E_j \neq 0$ より, $E_j = \pm 1$
よって, $S_j = \pm b_1$

◎ $5r_j = q_{j+1}b + r_{j+1} \cdots$ ⊠
◎ $5r_{j+m} = q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \cdots$ ⊠

⊠-⊠より,
$5(r_{j+m} - r_j) = b(q_{j+m+1} - q_{j+1}) + (r_{j+m+1} - r_{j+1})$
$q_{j+m+1} - q_{j+1} = R_j$
$5S_j = bR_{j+1} + S_{j+1}$
$5E_j b_1 = 2b_1 R_{j+1} + E_{j+1} b_1$
両辺を b_1 で割って,
$5E_j = 2R_{j+1} + E_{j+1}$

$j = 0, 1, 2, \cdots, (m-1)$ において,

$$\begin{aligned} 5E_0 &= 2R_1 + E_1 \\ 5E_1 &= 2R_2 + E_2 \\ &\vdots \\ 5E_{m-2} &= 2R_{m-1} + E_{m-1} \\ 5E_{m-1} &= 2R_m + E_m \end{aligned}$$

と表すことができる.
また,

$$\begin{aligned} 5^m E_0 &= 2 \cdot 5^{m-1} R_1 + 5^{m-1} E_1 \\ 5^{m-1} E_1 &= 2 \cdot 5^{m-2} R_2 + 5^{m-2} E_2 \\ &\vdots \\ 5^2 E_{m-2} &= 2 \cdot 5 R_{m-1} + 5E_{m-1} \\ 5E_{m-1} &= 2R_m + E_m \end{aligned}$$

より, これらの両辺をそれぞれ足すと,
$5^m E_0 = 2(5^{m-1}R_1 + 5^{m-2}R_2 + \cdots + 5R_{m-1} + R_m) + E_m$
$5^m E_0 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5 + E_m$

ここで,
$S_j = E_j b_1 = rj + m - r_j$
$j = 0$ とすると, $S_0 = E_0 b_1 = r_m - r_0$
$j = m$ とすると, $S_m = E_m b_1 = r_2 m - r_m = r_0 - r_m = -S_0 = -E_0 b_1$
$E_m b_1 = -E_0 b_1$より, $E_m = -E_0$

$r_0 = 1$ とすると, $E_0 b_1 = r_m - 1 > 0$
よって, $E_0 = 1$

これらより,
$5^m E_0 + E_0 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$
$(5^m - 1)E_0 + 2E_0 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$
$E_0 = 1$ より,
$(5^m - 1) + 2 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$

$5^m - 1 = (5-1)(5^{m-1} + \cdots + 1)$ であるので,
$(5-1)(5^{m-1} + \cdots + 1) + 2 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$
$\langle 4, 4, 4, \cdots, 4\rangle_5 + 2 = 2\langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$

両辺 2 で割って,
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 2\rangle_5 + 1 = \langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$
$\langle 2, 2, 2, \cdots, 3\rangle_5 = \langle R_1, R_2, \cdots, R_m\rangle_5$

[証明終]

5　今後の課題

今回は, 5つのテーマについての研究を行ったが, 証明まで終えられたのは,

$\frac{1}{2^n}(n \geq 3)$ を5進展開したときの2分割差

$\frac{H}{2^n}(n \geq 3, H$ は奇数) を5進展開したときの2分割差

$\frac{1}{3 \cdot 2^n}$ を5進展開したときの2分割差

であった.

$\frac{1}{q \cdot 2^n}$(q は奇数) を奇数進法で展開したときの2分割差について,

n の値が大きくなっていくにつれて, ある程度までいくと必ず同じ数字が整列する.

というデータを集めることはできたが,「ある程度」とは具体的にどのような値になるのか, また, 整列する数字の個数と奇数進法との関係について, 一般化して表し証明することが今後の課題の1つ目としてあげられる.

2つ目としては, 今回 $\frac{1}{3^n}(n \geq 3)$ を10進展開したときの3分割和についてのデータも集められたが, 3分割差をとろうとしたときにどうなるか, 3分割差を考えるための方法はあるのか, ということについてを課題とする.

6　参考文献

[1] 飯高 茂, 数学のかんどころ 17 環論, これはおもしろい 素因数分解と循環小数への応用, 2013,1

[2] 飯高 茂, Prolog で作る数学の世界 for Windows
SWI-Prolog ～Prolog そして集合 位相 群～,2012,4

7　感想

このゼミでは,Prolog の使い方から始まり, 主に循環節の性質について学びながら各自の卒業研究のテーマに沿って分析していくことを 1 年間かけて行ってきた. 分数を小数に直したときに繰り返す数字の不思議については, 私が小さい頃から気になっていたものだったため, これをテーマに挙げて研究することができ, とても嬉しく楽しみながら行えた. プログラミングを作り, データを大量に集め, その中からたくさんの性質を発見していく面白さは, 大学で 4 年間数学と深く向かい合ってきたからこそ味わえるものだと実感した. さらに, その性質を一般化し証明までもっていくことを, はじめはとても難しく感じ手こずっていたが, 飯高茂先生のサポートもあり, だんだんと理解を深め大きな達成感と感動を味わうことができた. 本研究の循環節についてのテーマは, 数学という学問の中のごくわずかな一部分だが, 1 つのテーマについてこれだけ時間をかけて向き合い, 深く研究できたということを誇りに思うと同時に, 様々な場面でサポートをして下さった飯高茂先生には心から感謝している. この経験と知識を活かし, これから社会に出た先で数学における感動や面白さを多くの人に伝えていきたいと思う.

（学習院大学理学部数学科 4 年 西村 まどか）

素数 p について, 分数 $\frac{1}{p}$ を G 進数展開した循環節の長さが偶数のとき, その循環節を 2 分割し和を求めると, G − 1 が並ぶことを知り, 私たちの研究は始まった.$\frac{1}{7}$ や $\frac{1}{11}$ 、$\frac{1}{13}$ を 10 進数展開した分割和を求め, 9 が並んだときの驚きと感動を, 今でも昨日のことのように思い出すことができる. 分母が 2 のべき乗や 3 のべき乗の場合などの分割和, 分割差を求めるプログラミングを作り, データを集めて規則性を探す作業は非常に大変であったが, 規則が見つかった時の感動は言葉にならないものであった. そこからその規則を証明したが, はじめはなかなか進まず苦戦した. しかし, 飯高先生にサポートしていただき, なんとか証明を終えることができた. その後, いくつもの証明に取り組んだが, 証明を終えた時には達成感を感じることができ, とても楽しく研究を進めることができた. 4 年間を通じて, 数学の楽しさ, 面白さを教えて下さった飯高先生に, 心より感謝している.

私は卒業後, 中学, 高等学校の数学の教員になる. 大学 4 年間で学んだプログラミングの技術や, これまでの研究を中学高校の数学の授業に取り入れ, より多くの生徒に数学の楽しさや面白さを伝えたいと思っている.

（学習院大学理学部数学科 4 年 島津　愛美）