$\frac{1}{3P}$ の循環節の4分割和の研究

09-043-015
学習院大学 理学部数学科
隠田茅秋

平成25年1月31日

目次

1　目的

　初めに次のような例を考える。
$\frac{1}{73}$ を小数展開すると、

$$\frac{1}{73} = 0.\dot{0}136986\dot{3}$$

　であり、循環節は [01369863] となる。
　この節を 2 分割し足し合わせると、

$$[0136] + [9863] = [9999]$$

となる。
一般に素数 p について分数 $\frac{1}{p}$ を小数展開し、循環節の長さが偶数の時、循環節を 2 分割し和を求めると 9 が並ぶ。

　循環節が 4 の倍数のとき、循環節を 4 分割し足し合わせてみると、

$$[01] + [36] + [98] + [63] = [198]$$

となる。
このように $\frac{1}{b}$ を小数に展開したときの循環節の長さが N の倍数ならば循環節を N 個に分け、それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数を N 分割和と呼ぶこととする。
分母が $3p$ の場合はどうだろうか。
一般的に

$$p \equiv 1 \bmod 6 \text{ のときは、分割和は } 6 \text{ が並ぶ}$$

$$p \equiv 5 \bmod 6 \text{ のときは、分割和は } 3 \text{ が並ぶ}$$

ことがわかっている。

今回は $\frac{1}{3p}$ を小数展開したときの循環節の 4 分割和について研究する。

2 方法

swi-prolog を用いる。

```
/*  リストの結合と分離  */
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).

left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,
N1 is N-1,!,
left(A=B1+[X|C],N1),
append0(B=B1+[X]),!.



/*  商と余り  */
res_q(A=B*Q+R):-Q is A//B,
R is A-B*Q.



/*  循環節をまとめて、リスト表記する  */
lj(A/B,G,L1) :- lj(A/B,G,L1,_).
lj(A/B,G,L1,RL1):- A<B,
lj_aux([A/B,G],A,0,L,[],RL,[]),
reverse(L,L1),reverse(RL,RL1).
%write(L1), length(L,Nagai),write(Nagai).



/*  循環節をまとめて、リスト表記する  */
j(A/B,G,W):-A<B,!,
j_aux([A/B,G],A,0,[],W0),
reverse(W0,W).


/*   A/B を G 進数展開したときの循環節のリストの長さ  */
j_aux([A/B,G],A,R,W,W):-R>0,!.
j_aux(Const,A0,R,L,W):-Const=[A/B,G],
!,A1 is A0*G,
res_q(A1=B*Q+R1),
% write(Q),tab(1),
```

```
L1=[Q|L],
j_aux(Const,R1,R1,L1,W).

lj_aux([A/B,G],A,R,L,L,RL,RL):- R>0,!. /*  */
lj_aux(Const,A0,R,L,W,RL1,RL2):-
        Const = [A/B,G], /* Const  G  G  */
        A1 is A0 * G,
        res_q(A1 = B*Q + R1),
%        write(Q=R),tab(1), /*  */
            lj_aux(Const,R1,R1,L,[Q|W],RL1,[R1|RL2]).



/*  リストを２分割する  */
even_list(W,V+V0):-length(W,K),
K=:=(K//2*2),
K1 is K//2,
left(W=V+V0,K1).


/*  数字をリスト表記する  */
num_list(N,L,G):-N<G,L=[N],!.
num_list(N,L,G):-N1 is N//G,M is N mod G,
num_list(N1,L1,G),
append0(L=L1+[M]).


/*  リスト表記を数字にする  */
list_num([N],N,G):-N<G,!.
list_num(L,W,G):-append0(L=L1+[N]),
list_num(L1,N1,G),W is N1*G+N.


/*  最大公約数  */
gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):-B1 is A mod B,
A1=B,
gcd(D=(A1,B1)).


/*  二分割和  */
p_list(P,W):-j(1/P,W,X),
% write(X),nl,
```

```
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,W),
list_num(Y2,B,W),
AB is A+B,
num_list(AB,C,W),
factorize(P,List),
length(List,N),
write(P),put(9),write(List),put(9),write(N),put(9),write(C),nl.


pp_list(A<B,W):- for(A=<B,N),
gcd(M=(W,N)),
M=:=1,
% write(N),nl,
       p_list(N,W),
fail.
pp_list(A<B,W).


all_2(I=<J,G):- for(I=<J,P),
gcd(D=(G,P)),
D=:=1,
write(1/P),nl,

p_list(P,G),
fail.
all_2(I=<J,G).




/*  for  */
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
I1 is I+1,
for(I1=<J,K).


/*   素因数分解  */
factor(P/2):-Q is P//2,P=:=2*Q,!.
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),
for(1=<P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
```

```
P=:=J1*Q,I=J1,!.
factor(P/P):-!.

factorize(P,[P]):-factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.



/*  AからBまでの素因数分解をリストで表す  */
prime_list(A<B):-for(A=<B,N),
factorize(N,List),write(N=List),nl,fail.
prime_list(A<B).



/*  リストの長さ  */
len0([],0).
len0([X|List],N):- len0(List,N1),N is N1+1.



/*  リストを４分割する  */
forth_list(W,V00+V01+V10+V11):-length(W,K),
K=:=(K//2*2),
K1 is K//2,
left(W=V+V0,K1),

even_list(V,V00+V01),
even_list(V0,V10+V11).


/*  ４分割和  */
p4_list(P,W):-j(1/P,W,X1),
reverse(X1,X),
% write(X),nl,
forth_list(X1,Y1+Y2+Y3+Y4),
list_num(Y1,A,W),
list_num(Y2,B,W),
list_num(Y3,C,W),
list_num(Y4,D,W),
```

```
E is A+B,
F is E+C,
G is F+D,
num_list(G,H,W),
factorize(P,List),
length(List,N),
write(P),put(9),write(List),put(9),write(N),put(9),write(H),nl.
```

```
pp4_list(A<B,W):- for(A=<B,N),
gcd(M=(W,N)),
M=:=1,
% write(N),nl,
       p4_list(N,W),
fail.
pp4_list(A<B,W).
```

3 結果

$\frac{1}{3p}$ を小数展開したとき循環節の長さが 4 の倍数の場合の、4 分割和の結果を種類ごとに表にまとめる。

表 1: [1,3,3,⋯,3,3,2] が並ぶ場合

3P	素因数分解	結果
219	[3,73]	[1,3,2]
291	[3,97]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
327	[3,109]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1047	[3,349]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1371	[3,457]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
543	[3,181]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
579	[3,193]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3603	[3,1201]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3747	[3,1249]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1983	[3,661]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2019	[3,673]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4467	[3,1489]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3027	[3,1009]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2487	[3,829]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
939	[3,313]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1011	[3,337]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1623	[3,541]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4971	[3,1657]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1731	[3,577]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2127	[3,709]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2811	[3,937]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3099	[3,1033]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3207	[3,1069]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3891	[3,1297]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4143	[3,1381]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4647	[3,1549]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4863	[3,1621]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]

表 2: [1,6,6,⋯,6,6,5] が並ぶ場合

3P	素因数分解	結果
843	[3,281]	[1,6,6,6,6,6,6,5]
87	[3,29]	[1,6,6,6,6,6,6,5]
4227	[3,1409]	[1,6,6,6,6,6,6,6,5]
1059	[3,353]	[1,6,6,6,6,6,6,6,5]
1851	[3,617]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3867	[3,1289]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
339	[3,113]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
447	[3,149]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1203	[3,401]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
699	[3,233]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1707	[3,569]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2283	[3,761]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2643	[3,881]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1383	[3,461]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2787	[3,929]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3147	[3,1049]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1779	[3,593]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
4083	[3,1361]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2103	[3,701]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
4443	[3,1481]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2571	[3,857]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2931	[3,977]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3291	[3,1097]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3543	[3,1181]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3579	[3,1193]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3651	[3,1217]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3687	[3,1229]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3903	[3,1301]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
4299	[3,1433]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
4659	[3,1553]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]

表 3: [2,3,3,⋯,3,3,1] が並ぶ場合

3P	素因数分解	結果
183	[3,61]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1263	[3,421]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
2307	[3,769]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1227	[3,409]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
687	[3,229]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1803	[3,601]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1299	[3,433]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
3063	[3,1021]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
3459	[3,1153]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
4287	[3,1429]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]

表 4: [6,6,6,⋯,6,6,6] が並ぶ場合

3p	素因数分解	4 分割和
303	[3,101]	[6]
411	[3,137]	[6,6]
51	[3,17]	[6,6,6,6]
1923	[3,641]	[6,6,6,6,6,6,6,6]
1347	[3,449]	[6,6,6,6,6,6,6,6]
267	[3,89]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1563	[3,521]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
4803	[3,1601]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
3183	[3,1061]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
771	[3,257]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
807	[3,269]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1167	[3,389]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1527	[3,509]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2463	[3,821]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2823	[3,941]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2859	[3,953]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]

表 1〜4 より、$\frac{1}{3p}$ を小数展開したとき循環節の長さが 4 の倍数の場合の 4 分割和は以下の 4 つに場合分けすることができる。

結果

- ☒ $[1, 3, \cdots, 3, 2]$ が並ぶ場合 ([3,3,3⋯,3] $\times$ 4) : (表 1) $\to p \equiv 1 \bmod 6$
- ☒ $[1, 6, \cdots, 6, 5]$ が並ぶ場合 ([3,3,3⋯,3] $\times$ 5) : (表 2) $\to p \equiv 5 \bmod 6$
- ☒ $[2, 3, \cdots, 3, 1]$ が並ぶ場合 ([3,3,3⋯,3] $\times$ 7) : (表 3) $\to p \equiv 1 \bmod 6$
- ☒ $[6, 6, \cdots, 6, 6]$ が並ぶ場合 ([3,3,3⋯,3] $\times$ 2) : (表 4) $\to p \equiv 5 \bmod 6$

各々、$[3, 3, 3\cdots, 3]$ の 4 倍、5 倍、7 倍、2 倍になることがわかった。

4　考察

1. 一般的な理論

　既約の真分数 $\dfrac{a}{b}$ を小数に g 進展開する事を考える。ただし、g と b は互いに素で、a と b も互いに素とする。
$a < b$ なので、商を q_1、余りを r_1 とすると、

$$ga = q_1 b + r_1 \quad (q_1 < g)$$

が成り立っている。
次に、余り r_1 に g をかけて b で割る。
商を q_2、余りを r_2 とすると、

$$gq_1 = q_2 b + r_2$$

これを $j = 2, 3 \cdots$ について繰り返すと、

$$gq_2 = q_3 b + r_3$$
$$\vdots$$
$$gq_{j-1} = q_j b + r_j$$
$$gq_j = q_{j+1} b + r_{j+1}$$

ここで mod$b$ で考えると、

$$ga \equiv r_1 \mod b$$
$$gr_1 \equiv r_2 \mod b$$
$$\vdots$$
$$gr_j \equiv r_{j+1} \mod b$$

これより、

$$r_2 \equiv gr_1 \equiv g \times ga \equiv g^2 a \mod b$$
$$r_3 \equiv gr_2 \equiv g \times g^2 a \equiv g^3 a \mod b$$

これを繰り返すと、$j = 1, 2, \cdots$ について

$$r_j \equiv g^j a \mod b$$

が成り立つ。ここで、$r_0 = a$ と考えれば、上の式は $j = 0$ でも成り立つ。したがって、数列 $\{r_j\}$ は mod$b$ で考えると、公比 g、初項 a の等比数列になっている。

数列 r_j は無限数列だが、各項は 0 と b の間の自然数だから、同じ値になる余りがたくさんある。
従って同じ値の 2 つの余り r_j と r_k があり、

$$r_j = r_k (j > k)$$

を満たす。$r_j \equiv g^j a \mod b, r_k \equiv g^k a \mod b, r_j = r_k$ より、

$$g^j a \equiv g^k a \mod b$$

$g^k a$ を左辺に移項すると、

$$(g^j - g^k)a \equiv 0 \mod b \ldots ⊠$$

一方、a と b は互いに素なので、mod$b$ において a には逆元 α がある。
α を⊠の両辺にかけると、

$$g^j - g^k \equiv 0 \mod b$$

また、g と b は互いに素なので、mod$b$ において g には逆元 β がある。
β^k を上式の両辺にかける。

$$g^j \beta^k - g^k \beta^k \equiv 0 \mod b$$
$$g^j \beta^k \equiv g^k \beta^k \mod b$$

$g^j \beta^k \equiv g^{j-k}$, $g^k \beta^k \equiv 1 \mod b$ により、

$$g^{j-k} \equiv 1 \mod b$$

ここで、u を $g^u \equiv 1 \mod b$ を満たす最小の正の整数 (u は mod$b$ での g の位数) とすると、$j-k$ は u の倍数。
従って、

$$j - k \equiv 0 \mod b$$

となる。

2. 周期性

一般に $\frac{1}{b}$ を小数に g 進展開したとき、その循環節の周期 u を λ を使って $\lambda(b)$ と書く。
g と b が互いに素ならば、$u = \lambda\ (b)$ は、mod b での g の位数と同じ。
$g^u \equiv 1 \mod b$ と $r_j \equiv g^j a \mod b$ により、

$$\begin{aligned} r_u &\equiv g^u a \equiv a \equiv r_0 \mod b \\ r_{u+1} &\equiv g^{u+1} a \equiv ga \equiv r_1 \mod b \\ r_{u+2} &\equiv g^{u+2} a \equiv g^2 a \equiv r_2 \mod b \end{aligned}$$

などが成り立ち、一般に

$$r_{u+j} \equiv g^{u+j} a \equiv g^j a \equiv r_j \mod b$$

以上のことから、

$$r_{u+j} \equiv r_j \mod b \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ。
一方、$r_{u+j} < b$, $r_j < b$ より、

$$r_{u+j} = r_j$$

従って、

$$\begin{aligned} r_u &= r_0 \\ r_{u+1} &= r_1 \\ r_{u+2} &= r_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

となり、u ごとに同じ値が繰り返されるので、数列 r_j は周期 u を持つことがわかった。
次に商の列 $q_1, q_2, \cdots$ についても周期性を考える。商は、$gr_{j-1} = bq_j + r_j$ により、

$$q_j = \frac{gr_{j-1} - r_j}{b}$$

ここで、周期性 $r_{j-1+u} = r_{j-1}$, $r_{j+u} = r_j$ に注意すると、

$$q_{j+u} = \frac{gr_{j+u-1} - r_{j+u}}{b} = \frac{gr_{j-1} - r_j}{b} = q_j$$

これにより、数列 q_j は周期 u を持つことがわかった。
特に、$q_1 = q_{u+1}$, $q_2 = q_{u+2}$, $q_u = q_{2u}$ なので、u 個の数 $q_1, q_2, \cdots, q_u$ がはじめから繰り返される。

周期性

u を mod$b$ での g の位数とすると、これは分数 $\dfrac{a}{b}$ を g 進小数展開したときの循環節の長さになり、$j = 0, 1, 2, \cdots$ について、

$$r_j \equiv g^j a \mod b$$

また、数列 $\{r_j\}, \{q_j\}$ は周期をもつ。

3. 証明

以上をふまえ、$\frac{1}{3p}$ の 4 分割和は、$[3,3,3,\cdots,3]$ の 4 倍、5 倍、7 倍、2 倍となることを証明する。

周期が 4 の倍数のとき、$u=4m$ とする。
周期の定義から、

$$g^u = g^{4m} \equiv 1 \bmod 3p$$

法の条件を mod3 と mod$p$ に分けると、

$$\begin{cases} g^{4m} \equiv 1 \mod p \\ g^{4m} \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$$

$g=10$ とすると、$g-1=9\equiv 0 \bmod 3$ より $g\equiv 1 \bmod 3$

$$\therefore\ g^w \equiv 1 \bmod 3$$

$g^m = x$ とおくと、

$$x^4 - 1 \equiv 0 \bmod p$$

$$(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right) \equiv 0 \bmod p$$

$x-1 \not\equiv 0$ なので、

$$x^3+x^2+x+1 \equiv 0 \bmod p$$

$$g^{3m}+g^{2m}+g^m+1 \equiv 0 \bmod p$$

ここで $g^{3m}+g^{2m}+g^m+1 = Lp$ とおく。

また、

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} = ag^j g^m$$

$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m}$ とおくと、

$$\begin{aligned} R_j &= ag^j + ag^{j+m} + ag^{j+2m} + ag^{j+3m} \\ &= ag^j\left(1+j^m+j^{2m}+j^{3m}\right) \\ &= ag^j Lp \end{aligned}$$

ここで $ag^jL = L_j$ とおくと、

$$R_j = L_j p$$

$b = 3p$ だったので

$$
\begin{array}{rccc}
 & gr_j & = & 3pq_{j+1} + r_{j+1} \\
 & gr_{j+m} & = & 3pq_{j+m+1} + r_{j+m+1} \\
 & gr_{j+2m} & = & 3pq_{j+m+2} + r_{j+m+2} \\
+) & gr_{j+3m} & = & 3pq_{j+m+3} + r_{j+m+3} \\
\hline
 & g(r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m}) & = & 3p(q_{j+1} + q_{j+m+1} + q_{j+m+2} + q_{j+m+3}) \\
 & & & +(r_{j+1} + r_{j+m+1} + r_{j+m+2} + r_{j+m+3})
\end{array}
$$

$q_{j+1} + q_{j+m+1} + q_{j+m+2} + q_{j+m+3} = Q_j$ とおくと、

$$gR_j = 3pQ_{j+1} + R_{j+1}$$

$$gL_jp = 3pQ_{j+1} + L_{j+1}p$$

$$\therefore\ gL_j = 3Q_{j+1} + L_{j+1}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
R_m = L_mp &= r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_0 \\
&= R_0 \\
&= L_0p
\end{aligned}
$$

よって、$L_m = L_0$ である。

$j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ を代入すると、

$$
\begin{array}{rl}
j = 0: & gL_0 = 3Q_1 + L_1 \\
j = 1: & gL_1 = 3Q_2 + L_2 \\
j = 2: & gL_2 = 3Q_1 + L_3 \\
 & \vdots \\
j = m-1: & gL_{m-1} = 3Q_m + L_0
\end{array}
$$

各々、

$j = 0$ 式に g^{m-1}

$j = 1$ 式に g^{m-2}

$j = 2$ 式に g^{m-3}

$\vdots$

をかけ、両辺を足すと、

$$
\begin{array}{rccc}
 & g^m L_0 & = & g^{m-1}(3Q_1 + L_1) \\
 & g^{m-1} L_1 & = & g^{m-2}(3Q_2 + L_2) \\
 & g^{m-2} L_2 & = & g^{m-3}(3Q_3 + L_3) \\
 & \vdots & & \\
+) & gL_{m-1} & = & 3Q_m + L_0 \\
\hline
 & g^m L_0 & = & 3(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + L_0 \\
 & (g^m - 1)L_0 & = & 3\left\langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \right\rangle_g
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \right\rangle_g &= \frac{g^m - 1}{3} L_0 \\
&= \frac{10^m - 1}{3} L_0 \\
\therefore \left\langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \right\rangle_g &= \left\langle 3, 3, 3, \cdots, 3, 3 \right\rangle_g L_0
\end{aligned}
$$

次に L_0 の値を調べる。

$$
\begin{aligned}
r_0 + r_{2m} &\equiv a + ag^{j+2m} \\
&\equiv a\left(1 + g^{2m}\right) \bmod p
\end{aligned}
$$

$x^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$ より、

$$r_0 + r_{2m} \text{は } p \text{ の倍数であるから}$$

$$r_0 + r_{2m} = pM_0$$

同様に

$$r_m + r_{3m} = pN_0$$

とおく。

$$pM_0 = r_0 + r_{2m} = a + r_{2m} < 1 + (3p - 1) = 3p$$

$$pN_0 = r_m + r_{3m} < (3p - 1) + (3p - 1) = 6p - 2 < 6p$$

$$\therefore\ M_0 \leq 3$$

$$\therefore\ N_0 \leq 5$$

　また、$R_0 = r_0 + r_m = r_{2m} + r_{3m} = pM_0 + pN_0 \ldots$ ⊠
　　　$R_j = L_j p$ より $R_0 = L_0 p$　　　　　　　　$\ldots$ ⊠
⊠、⊠より

$$L_0 p = pM_0 + pN_0$$
$$\therefore\ L_0 = M_0 + N_0$$

mod3 でみると、$r_j \equiv g^j \equiv 1 \bmod 3$ であり、

$$pM_0 = r_0 + r_{2m} \equiv 1 + g^{2m} \equiv 2 \bmod 3$$
$$pN_0 = r_m + r_{3m} \equiv g^m + g^{3m} \equiv 2 \bmod 3$$

● $p \equiv 1 \bmod 6$ ならば $p \equiv 1 \bmod 3$ であり、

$$M_0 \equiv 2 \bmod 3$$
$$N_0 \equiv 2 \bmod 3$$

よって、$M_0 = 2, N_0 = 2, 5$

$$(M_0, N_0) = (2, 2) \text{ のとき、} L_0 = 4$$
$$(M_0, N_0) = (2, 5) \text{ のとき、} L_0 = 7$$

● $p \equiv 5 \bmod 6$ ならば $p \equiv 2 \bmod 3$ であり、

$$M_0 \equiv 1 \bmod 3$$
$$N_0 \equiv 1 \bmod 3$$

よって、$M_0 = 1, N_0 = 1, 4$

$$(M_0, N_0) = (1, 1) \text{ のとき、} L_0 = 2$$
$$(M_0, N_0) = (1, 4) \text{ のとき、} L_0 = 5$$

以上により、$L_0 = 4, 7, 2, 5$ であることが示された。
よって $\frac{1}{3p}$ の 4 分割和は、$[3, 3, 3, \cdots, 3]$ の 4 倍、5 倍、7 倍、2 倍となることがわかった。

5　今後の課題

swi-prolog を使って分母が 3 から 5000 までの 4 分割和を出力するプログラミングを作ったので、分母が $3p$ 以外でも規則性を見つけたいと思いました。

6　感想

今回分母が $3p$ の場合の四分割和について研究し、一見規則性がないように思えるものでも一定の規則を見つけられたときには感動しました。分割和 3 の 5 倍、7 倍になることは想像もつかないことで、なんでも研究をしてみないとわからないものなんだなということがわかりました。
研究途中で間違ったプログラムを作ってしまっていて、思うような結果が得られなかったときは嫌になりそうになった時もあったけど、あきらめずに何度でも辛抱強くやることの大切さも実感しました。
swi-prolog、tex の使い方もわからず、一から指導してくださった先生に感謝しています。ありがとうございました。