分母が$3P$の4分割和の研究

隠田茅秋
09-043-015
学習院大学 理学部数学科

Contents

1. 目的

(例) $\frac{1}{73}$ を10進で小数展開する。

$$\frac{1}{73} = 0.\dot{0}136986\dot{3}$$

循環節は [01369863](長さ:8)

●循環節が偶数のとき、$\frac{1}{73}$ の循環節の $\boxed{2\text{分割和}}$ は

$$[0136] + [9863] = [9999]$$

分母が p の場合 (p:素数)

循環節の長さが偶数のとき、循環節の2分割和は9が並ぶ。

$\frac{1}{b}$を小数に展開したときの循環節の長さがNの倍数ならば循環節をN個に分け、それらを加えてできた数をN分割和と呼ぶこととする。(桁上がりも考える)

●循環節が4の倍数のとき、$\frac{1}{73}$の$\boxed{4\text{分割和}}$は

$$[01] + [36] + [98] + [63] = [198] \ (= [99] \times 2)$$

$\boxed{2\text{分割和}}$は$[9999]$であるから

$\boxed{4\text{分割和}}$は$[99] + [99] = [99] \times 2 = [198]$

となることは予想がつく。

●分母が$3p$の場合

(例1)$p=7$

$$\frac{1}{21}=0.\dot{0}4761\dot{9}$$

循環節は [047619](長さ:6)

$\boxed{2分割和}$は [047] + [619] = [666]

(例2)$p=17$

$$\frac{1}{51}=0.\dot{0}1754385964912280\dot{7}$$

循環節は [017543859649122807](長さ:18)

$\boxed{2分割和}$は [017543859]+[649122807] = [33333333]

既知の定理：分母が$3p$の2分割和($p>3$の素数)

● $p \equiv 1 \bmod 6$のとき→$[6, 6, \dots, 6, 6]$

● $p \equiv 5 \bmod 6$のとき→$[3, 3, \dots, 3, 3]$

今回は分数$\frac{1}{3p}$の循環節の4分割和について研究する。

$\boxed{\text{方法}}$

bが5000までの数について4分割和を出力するプログラムを作り、その中で$b=3p$となる4分割和を調べた。

2. 結果

TABLE 1. [1,3,3,⋯,3,3,2] が並ぶ場合

3p	素因数分解	4分割和
219	[3,73]	[1,3,2]
291	[3,97]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
327	[3,109]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1047	[3,349]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1371	[3,457]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
543	[3,181]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
579	[3,193]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3603	[3,1201]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3747	[3,1249]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1983	[3,661]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2019	[3,673]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
4467	[3,1489]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
3027	[3,1009]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
2487	[3,829]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
939	[3,313]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
1011	[3,337]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]
⋮		
4863	[3,1621]	[1,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2]

Table 2. [1,6,6,⋯,6,6,5] が並ぶ場合

3p	素因数分解	4 分割和
843	[3,281]	[1,6,6,6,6,6,6,5]
87	[3,29]	[1,6,6,6,6,6,6,5]
4227	[3,1409]	[1,6,6,6,6,6,6,6,5]
1059	[3,353]	[1,6,6,6,6,6,6,6,5]
1851	[3,617]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3867	[3,1289]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
339	[3,113]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
447	[3,149]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1203	[3,401]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
699	[3,233]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1707	[3,569]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2283	[3,761]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2643	[3,881]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1383	[3,461]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
2787	[3,929]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
3147	[3,1049]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
1779	[3,593]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
4083	[3,1361]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]
⋮		
4659	[3,1553]	[1,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,5]

Table 3. [2,3,3,⋯,3,3,1] が並ぶ場合

3p	素因数分解	4分割和
183	[3,61]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1263	[3,421]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
2307	[3,769]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1227	[3,409]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
687	[3,229]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1803	[3,601]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
1299	[3,433]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
3063	[3,1021]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
3459	[3,1153]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]
4287	[3,1429]	[2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3⋯,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1]

Table 4. [6,6,6,⋯,6,6,6] が並ぶ場合

3p	素因数分解	4 分割和
303	[3,101]	[6]
411	[3,137]	[6,6]
51	[3,17]	[6,6,6,6]
1923	[3,641]	[6,6,6,6,6,6,6,6]
1347	[3,449]	[6,6,6,6,6,6,6,6]
267	[3,89]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1563	[3,521]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
4803	[3,1601]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
3183	[3,1061]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
771	[3,257]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
807	[3,269]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1167	[3,389]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
1527	[3,509]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2463	[3,821]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2823	[3,941]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]
2859	[3,953]	[6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,⋯,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6]

表1〜4より、$\frac{1}{3p}$を小数展開したとき循環節の長さが4の倍数の場合の4分割和は以下の4つに場合分けすることが出来る。

結果

☒ $[1,3,\ldots,3,2]$が並ぶ場合→$([3,3,3\ldots,3]\times 4)$
☒ $[1,6,\ldots,6,5]$が並ぶ場合→$([3,3,3\ldots,3]\times 5)$
☒ $[2,3,\ldots,3,1]$が並ぶ場合→$([3,3,3\ldots,3]\times 7)$
☒ $[6,6,\ldots,6,6]$が並ぶ場合→$([3,3,3\ldots,3]\times 2)$

各々、$[3,3,3\ldots,3]$の4倍、5倍、7倍、2倍になることがわかった。

3. 考察

$$\frac{1}{87} = 0.\dot{0}11494252873563218390804597\dot{7}$$

循環節は [0114942528735632183908045977](長さ:28)

$$87 = [3 \times 29]$$

$$p = 29 \equiv 5 \bmod 6$$

既知の定理より

$\boxed{2\text{分割和}}$は [33333333333333]

であるから

$\boxed{4\text{分割和}}$は $[3333333] \times 2 = [6666666]$

となることが予想される。

$\frac{1}{87}$の4分割和は

予想→ [6,6,6,6,6,6,6]

実際の結果→ [1,6,6,6,6,6,6,5]

必ずしも2分割和の2倍とっているわけではないことがわかった。

4. 証明

以上をふまえ、$\frac{1}{3p}$の4分割和は[3,3,3,⋯,3]の4倍、5倍、7倍、2倍となることを証明する。

周期が4の倍数のとき、$u = 4m$とする。
周期の定義から、

$$g^u = g^{4m} \equiv 1 \bmod 3p$$

法の条件をmod3とmod$p$に分けると、

$$\begin{cases} g^{4m} \equiv 1 \mod p \\ g^{4m} \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$$

$$g = 10 \text{とすると、} g - 1 = 9 \equiv 0 \bmod 3 \text{より} g \equiv 1 \bmod 3$$
$$\therefore g^w \equiv 1 \bmod 3$$

$g^m = x$ とおくと、

$$x^4 - 1 \equiv 0 \bmod p$$
$$(x-1)\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) \equiv 0 \bmod p$$

$x - 1 \not\equiv 0$ なので、

$$x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \bmod p$$
$$g^{3m} + g^{2m} + g^m + 1 \equiv 0 \bmod p$$

ここで $g^{3m} + g^{2m} + g^m + 1 = Lp$ とおく。

また、

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} \equiv ag^j g^m$$

$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m}$とおくと、

$$\begin{aligned} R_j &= ag^j + ag^{j+m} + ag^{j+2m} + ag^{j+3m} \\ &= ag^j \left(1 + j^m + j^{2m} + j^{3m}\right) \\ &= ag^j Lp \end{aligned}$$

ここで$ag^j L = L_j$とおくと、

$$R_j = L_j p$$

$b=3p$だったので

$$
\begin{array}{rrcr}
 & gr_j & = & 3pq_{j+1}+r_{j+1} \\
 & gr_{j+m} & = & 3pq_{j+m+1}+r_{j+m+1} \\
 & gr_{j+2m} & = & 3pq_{j+m+2}+r_{j+m+2} \\
+) & gr_{j+3m} & = & 3pq_{j+m+3}+r_{j+m+3} \\
\hline
 & gR_j & = & 3p(q_{j+1}+q_{j+m+1}+q_{j+m+2}+q_{j+m+3})+R_j
\end{array}
$$

$q_{j+1}+q_{j+m+1}+q_{j+m+2}+q_{j+m+3}=Q_j$とおくと、

Q_jは循環節の4分割和であり

$$gR_j = 3pQ_{j+1}+R_{j+1}$$

$$gL_jp = 3pQ_{j+1}+L_{j+1}p$$

$$\therefore gL_j = 3Q_{j+1}+L_{j+1}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
R_m = L_m p = r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_0 \\
= R_0 \\
= L_0 p \\
\therefore L_m = L_0
\end{aligned}
$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$を代入すると、

$$
\begin{aligned}
j = 0: \quad & gL_0 = 3Q_1 + L_1 \\
j = 1: \quad & gL_1 = 3Q_2 + L_2 \\
j = 2: \quad & gL_2 = 3Q_1 + L_3 \\
& \vdots \\
j = m-1: \quad & gL_{m-1} = 3Q_m + L_0
\end{aligned}
$$

各々、

$j=0$ 式に g^{m-1}

$j=1$ 式に g^{m-2}

$j=2$ 式に g^{m-3}

$$\vdots$$

をかけ、両辺を足すと

$$
\begin{array}{rrcl}
 & g^m L_0 & = & g^{m-1}(3Q_1 + L_1) \\
 & g^{m-1} L_1 & = & g^{m-2}(3Q_2 + L_2) \\
 & g^{m-2} L_2 & = & g^{m-3}(3Q_3 + L_3) \\
 & \vdots & & \\
+) & g L_{m-1} & = & 3Q_m + L_0 \\
\hline
 & g^m L_0 & = & 3(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \ldots + Q_m) + L_0 \\
 & (g^m - 1)L_0 & = & 3\left\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \right\rangle_g
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \right\rangle_g &= \frac{g^m - 1}{3} L_0 \\
&= \frac{10^m - 1}{3} L_0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \left\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \right\rangle_g = \left\langle 3, 3, 3, \ldots, 3 \right\rangle_g L_0
$$

次にL_0の値を調べる。

$$\begin{aligned} r_0 + r_{2m} &\equiv a + ag^{j+2m} \\ &\equiv a\left(1 + g^{2m}\right) \bmod p \end{aligned}$$

$x^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$より、$r_0 + r_{2m}$はpの倍数であるから

$$r_0 + r_{2m} = pM_0$$

同様に

$$r_m + r_{3m} = pN_0$$

とおく。

$$pM_0 = r_0 + r_{2m} = 1 + r_{2m} < 1 + (3p - 1) = 3p$$

$$\therefore M_0 \leq 3$$

$$pN_0 = r_m + r_{3m} < (3p - 1) + (3p - 1) = 6p - 2 < 6p$$

$$\therefore N_0 \leq 5$$

また、$R_0 = r_0 + r_m = r_{2m} + r_{3m} = pM_0 + pN_0 \ldots$ ⊠

$R_j = L_j p$ より $R_0 = L_0 p$ $\ldots$ ⊠

⊠、⊠より

$$L_0 p = pM_0 + pN_0$$

$$\therefore L_0 = M_0 + N_0$$

mod3でみると、$r_j \equiv g^j \equiv 1 \bmod 3$であり、

$$pM_0 = r_0 + r_{2m} \equiv 1 + g^{2m} \equiv 2 \bmod 3$$

$$pN_0 = r_m + r_{3m} \equiv g^m + g^{3m} \equiv 2 \bmod 3$$

●$p \equiv 1 \bmod 6$ならば$p \equiv 1 \bmod 3$であり、

$$M_0 \equiv 2 \bmod 3$$
$$N_0 \equiv 2 \bmod 3$$

よって、$M_0 = 2, N_0 = 2, 5$

$\therefore (M_0, N_0) = (2, 2)$のとき、$L_0 = 4$

$\therefore (M_0, N_0) = (2, 5)$のとき、$L_0 = 7$

●$p \equiv 5 \bmod 6$ならば$p \equiv 2 \bmod 3$であり、

$$M_0 \equiv 1 \bmod 3$$
$$N_0 \equiv 1 \bmod 3$$

よって、$M_0 = 1, N_0 = 1, 4$

$\therefore (M_0, N_0) = (1, 1)$のとき、$L_0 = 2$

$\therefore (M_0, N_0) = (1, 4)$のとき、$L_0 = 5$

以上により、$L_0 = 4, 7, 2, 5$であることが示された。

$\boxed{\dfrac{1}{3p}\text{の4分割和は、}[3,3,3,\cdots,3]\text{の4倍、5倍、7倍、2倍となる。}}$

5. 今後の課題

swi-prologを使って分母が3から5000までの4分割和を出力するプログラミングを作ったので、$3p$、$6p$など分母が$3p$以外でも規則性を見つけたいと思いました。