底が一般の完全数

田中裕
学習院大学数学科 4 年

2012 年 11 月 15 日

目 次

1 目的 **2**

2 方法 **2**

2.1 (完全数) 5
2.2 (底が 3 のとき) 8
2.3 (底が 5 のとき) 9
2.4 (底が 7 のとき) 10
2.5 (底が 9 のとき) 11

3 結果 **12**

4 考察 **17**

1　目的

底が一般の完全数を考えて研究することを目的とする.

2　方法

swi-prolog を用いる.

```
/**1. 最小の素因子**/

factor(P/2):- Q is P//2,P =:= 2*Q,!.
factor(P/I):- P1 is floor(sqrt(P)),
    for(1 =< P1,J),
    J1 is 2*J+1,
    Q is P//J1,
    P =:= J1*Q,I= J1,!.
factor(P/P) :- !.



factorize(P,[P]):- factor(P/I),I==P,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
    P1 is P//I,
    List=[I|List1],
    factorize(P1,List1),!.

/**2. 指数表示化**/

exps([X],[X]):-!.
exps([X|List],[X^E|Exp]):-
    List=[X|L],
    exps(List,[Y|Exp]),
    (    Y=X^E0-> E is E0+1; E=2).

exps([X|List],[X|Exp]):-
    List=[Z|_],Z \==X,
    exps(List,Exp).

/**3. 約数の s 乗和**/

sdiv0(P^E,D,S):-!,E>1,
    E1 is E+1,
    S1 is P^(E1*D)-1,
    S0 is P^D-1,
```

```
    (   D>0 ->  S is S1//S0; S is 1+E).
sdiv0(P,D,S):- S is 1+P^D.


sdiv([],D,1):-!.
sdiv([X|List],D,S):- sdiv0(X,D,S1),
    sdiv(List,D,S2),
    S is S1*S2.

ndiv(N,A,B):-
    factorize(N,L),
    exps(L,Ex),
    sdiv(Ex,1,A),
    sdiv(Ex,0,B).

max(M,P):-factorize(M,L),
    append0(L=X+[P]).

/**4.メルセンヌ素数を求める.**/

prm(M1=<M2,Q):-for(M1=<M2,X),
factorize(X,Y),
Y = [P],
N is 2^X-1,
factorize(N,L),
write(X),put(9),
write(N),put(9),
write(L),nl,fail.

prm(M,Q).


prm2(M1=<M2,Q):-for(M1=<M2,X),
factorize(X,Y),
Y = [P],
N is (Q^X-1)//(Q-1),
factorize(N,L),
write(X),put(9),
write(N),put(9),
write(L),nl,fail.

prm2(M,Q).
```

完全数の定義
完全数の正の約数の総和は元の数の **2** 倍に等しい.
すなわち,n が完全数であるとは,約数関数 $\sigma(n)$ に対して
$\sigma(n) = 2n$ を満たす.

約数関数 $\sigma(n)$ は,自然数 n を変数とする関数で,
n の全ての約数の総和としたものである.
式では,

$$\sigma(n) = \textstyle\sum_{d|n} d \quad (d \text{ は } n \text{ の約数})$$

と表される.
例えば,
ある数 $n = p^e(e > 0)$ の約数は

$$1, p, p^2, p^3, \cdots, p^e$$

であるから, 約数の総和は

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{e} p^k = 1 + p + p^2 + p^2 + p^3 + \cdots + p^e$$

$$= \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1}$$

また, a, b を互いに素な自然数としたとき,

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$$

この性質を 乗法性 という.

(例)
$n = 12$ のとき,
$12 = 3 \cdot 2^2$ であるから,

$\sigma(12) = \sigma(3)\sigma(2^2) = (1 + 3)(1 + 2 + 4) = 28,$
つまり,12 の約数の総和は 28 となる.

2.1 (完全数)

偶数の完全数は $2^{n-1}p$ と書けることを証明する.

a を偶数の完全数とすると, 奇数 k により
$a = 2^{n-1}k$ と表される.

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1})\sigma(k) = (2^n - 1)\sigma(k)$$

仮定より,$\sigma(a) = 2a = 2^n k$. したがって,

$$(2^n - 1)\sigma(k) = 2^n k$$

2^n の項でまとめると,

$$2^n(\sigma(k) - k) = \sigma(k)$$

$\sigma(k) - k$ を右辺にも作ると,

$$2^n(\underline{\sigma(k) - k}) = \underline{\sigma(k) - k}\mathbf{+k}$$

が得られる. さらに $(\sigma(k) - k))$ の項でまとめると,

$$(2^n - 1)(\sigma(k) - k) = k$$

$\sigma(k) - k$ は k の約数であり,k 以外の約数の和である.

ここで, $\sigma(k) - k > 1$ と仮定すると,
k の約数はこのとき,

$$1, \sigma(k) - k, k$$

総和は,

$$\sigma(k) \geq 1 + (\sigma(k) - k) + k = 1 + \sigma(k)$$

,

となり, 矛盾している.

よって, $\sigma(k) - k = 1$ がいえる.
変形すると,

$$\sigma(k) = 1 + k$$

1 と k は k の約数なので,k は素数である.

$\sigma(k) - k = 1$ を，

$$(2^n - 1)(\sigma(k) - k) = k$$

に代入すると，

$$k = 2^n - 1$$

k が素数であれば $2^{n-1}k$ は**完全数**であることがわかった．

$\sigma(a) = 2a$ を満たす a をすべて求める.

$p = 2^n - 1 > 1$ は素数, $a = 2^{n-1}p$ とする.

$\boxed{p = 2^n - 1}$ は**メルセンヌ数**といい, 特に $\underline{p\text{ が素数のとき}}$ は, **メルセンヌ素数**という.

p が**素数**のとき,n も**素数**になることが知られている.

完全数は**メルセンヌ素数**と関係が深く,
$p = 2^n - 1$ が素数ならば,

$a = 2^{n-1}p$ **は完全数**であることが知られてる.

$a = 2^{n-1}p$ は定義である,$\sigma(a) = 2a$ になるか確認すると,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1}p)$$

$$= \sigma(2^{n-1})\sigma(p) \quad (2^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= (2^n - 1)(p + 1)$$

ここで,
$\boxed{p + 1 = 2^n}$ とすると,

$$\sigma(a) = 2^n p = 2(2^{n-1}p) = 2a$$

したがって,

a は $\underline{\textbf{完全数}}$ である.

2.2 (底が 3 のとき)

$\mathrm{pmax}(a)$ を a の最大素因子とし.

底が 3 のときの**完全数**を定義する.

$$p = \frac{3^n-1}{2} > 1 \text{ は素数}, \ a = 3^{n-1}p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(3^{n-1}p)$$

$$= \sigma(3^{n-1})\sigma(p) \quad (3^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{3^n-1}{2}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1 = \frac{3^n+1}{2}}$ とすると,

$$\sigma(a) = \frac{(3^n+1)}{2}p = \frac{3^np+p}{2} = \frac{3(3^{n-1}p)+p}{2}$$

したがって,p は素数ならば,

$$2\sigma(a) = 3a + \mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす}.$$

これより,

$$2\sigma(a) = 3a + \mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす } a \text{ を**底が 3 の完全数**と定義する}.$$

2.3 (底が 5 のとき)

底が 5 のときの完全数を定義する.

$$p = \tfrac{5^n-1}{4} > 1 \text{ は素数}, \ a = 5^{n-1}p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(5^{n-1}p)$$

$$= \sigma(5^{n-1})\sigma(p) \quad (5^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{5^n-1}{4}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1 = \frac{5^n+3}{4}}$ とすると,

$$\sigma(a) = \frac{(5^n+3)}{4}p = \frac{5^np+3p}{4} = \frac{5(5^{n-1}p)+3p}{4}$$

したがって,p は素数ならば,

$$4\sigma(a) = 5a + 3\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす}.$$

これより,

$$4\sigma(a) = 5a + 3\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす } a \text{ を底が 5 の完全数と定義する}.$$

2.4 (底が 7 のとき)

底が 7 のときの完全数を定義する.

$$p = \frac{7^n-1}{6} > 1 \text{ は素数}, \; a = 7^{n-1}p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(7^{n-1}p)$$

$$= \sigma(7^{n-1})\sigma(p) \quad (7^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{7^n-1}{6}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1 = \frac{7^n+5}{6}}$ とすると,

$$\sigma(a) = \frac{(7^n+5)}{6}p = \frac{7^n p + 5p}{6} = \frac{7(7^{n-1}p)+5p}{6}$$

したがって,p は素数ならば,

$$6\sigma(a) = 7a + 5\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす}.$$

これより,

$$6\sigma(a) = 7a + 5\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす } a \text{ を底が 7 の完全数と定義する}.$$

2.5 (底が 9 のとき)

底が 9 のときの完全数を定義する.

$p = \frac{9^n-1}{8} > 1$ は素数, $a = 9^{n-1}p$ とおく.

$$\sigma(a) = \sigma(9^{n-1}p)$$

$$= \sigma(9^{n-1})\sigma(p) \quad (9^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{9^n-1}{8}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1 = \frac{9^n+7}{8}}$ とすると,

$$\sigma(a) = \frac{(9^n+7)}{8}p = \frac{9^n p + 7p}{8} = \frac{9(9^{n-1}p) + 7p}{8}$$

したがって,p は素数ならば,

$$8\sigma(a) = 9a + 7\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす.}$$

これより,

$$8\sigma(a) = 9a + 7\mathbf{pmax}(a) \text{ を満たす } a \text{ を底が 9 の完全数と定義する.}$$

3　結果

3.1　素数 $p = 2^n - 1$ を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,2).
n        p              素因数分解
2        3              [3]
3        7              [7]
5        31             [31]
7        127            [127]
11       2047           [23, 89]
13       8191           [8191]
17       131071         [131071]
19       524287         [524287]
23       8388607        [47, 178481]
29       536870911      [233, 1103, 2089]
```

(解説)
左の列は n の値, 真ん中は p の値, 右の列は p を素因数分解したものである.
このプログラムは $1 \leq n \leq 30$ の素数の中で,
p が**メルセンヌ素数**となる数を探し出したものである.
$\sigma(a) = 2a$ となるような自然数 a を求めると,
表 1 のようになる.

表 1: 完全数

n	$p = 2^n - 1$	素因数分解	$a = 2^{n-1}p$
2	3	[3]	6
3	7	[7]	24
5	31	[31]	496
7	127	[127]	8128
11	2047	[23, 89]	2096128
13	8191	[8191]	33550336
17	131071	[131071]	8589869056
19	524287	[524287]	137438691328
23	8388607	[47, 178481]	35184367894528
29	536870911	[233, 1103, 2089]	144115187807420416

具体例
例えば,$n = 2$ のとき,$p = 3$ で**メルセンヌ素数**であるから,$a = 6$ になる.
また,$\sigma(6) = \sigma(2)\sigma(3) = (1+2)(1+3) = 12$ なので,$\sigma(a) = 2a$ を満たし, **完全数**といえる.
同様に考えると,$a = 6, 28, 496, 8128, \cdots$ は完全数であることが解る.

3.2 素数 $p = \frac{3^n - 1}{2}$ を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,3).
n       p                   素因数分解
2       4                   [2, 2]
3       13                  [13]
5       121                 [11, 11]
7       1093                [1093]
11      88573               [23, 3851]
13      797161              [797161]
17      64570081            [1871, 34511]
19      581130733           [1597, 363889]
23      47071589413         [47, 1001523179]
29      34315188682441      [59, 28537, 20381027]
```

$2\sigma(a) = 3a + \mathbf{pmax}(a)$ を満たすような a の値は, 表 2 のようになる.

表 2: $a = 3^{n-1}p$

n	$p = \frac{3^n-1}{2}$	素因数分解	$a = 3^{n-1}p$
2	4	[2, 2]	12
3	13	[13]	117
5	121	[11, 11]	9801
7	1093	[1093]	796797
11	88573	[23, 3851]	5230147077
13	797161	[797161]	423644039001
17	64570081	[1871, 34511]	2779530261754401
19	581130733	[1597, 363889]	225141952751788437
23	47071589413	[47, 1001523179]	1477156353259726319517
29	34315188682441	[59, 28537, 20381027]	785021449541029367424039801

$2\sigma(a) = 3a + \mathbf{pmax}(a)$ を満たす a は, $p = 13$, $a = 117$ のとき
である.

3.3　素数 $p = \frac{5^n-1}{4}$ を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,5).
n       p                       素因数分解
2       6                       [2, 3]
3       31                      [31]
5       781                     [11, 71]
7       19531                   [19531]
11      12207031                [12207031]
13      305175781               [305175781]
17      190734863281            [409, 466344409]
19      4768371582031           [191, 6271, 3981071]
23      2980232238769531        [8971, 332207361361]
29      4656612873077392578l    [59, 35671, 22125996444329]
```

$4\sigma(a) = 5a + 3\mathbf{pmax}(a)$ を満たす a の値は, 表 3 のようになる.

表 3: $a = 5^{n-1}p$

n	$p = \frac{5^n-1}{4}$	素因数分解	$a = 5^{n-1}p$
2	6	[2, 3]	30
3	31	[31]	775
5	781	[11, 71]	488125
7	19531	[19531]	305171875
11	12207031	[12207031]	119209287109375
13	305175781	[305175781]	74505805908203125
17	190734863281	[409, 466344409]	291038304566955566640625
19	4768371582031	[191, 6271, 3981071]	181898940354547611083984375
23	2980232238769531	[8971, 332207361361]	7105427357601001262664794921875
29	46566128730773925781	[59, 35671, 22125996444329]	1734723475976807094402611255645751953125

3.4 素数 $p = \frac{7^n - 1}{6}$ を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,7).
n        p                        素因数分解
2        8                        [2, 2, 2]
3        57                       [3, 19]
5        2801                     [2801]
7        137257                   [29, 4733]
11       329554457                [1123, 293459]
13       16148168401              [16148168401]
17       38771752331201           [14009, 2767631689]
19       1899815864228857         [419, 4534166740403]
23       4561457890013486057      [47, 3083, 31479823396757]
```

$6\sigma(a) = 7a + 5\mathbf{pmax}(a)$ を満たす a の値は, 表 4 のようになる.

表 4: $a = 7^{n-1}p$

n	$p = \frac{7^n-1}{6}$	素因数分解	$a = 7^{n-1}p$
2	8	[2, 2, 2]	56
3	57	[3, 19]	2793
5	2801	[2801]	6725201
7	137257	[29, 4733]	16148148793
11	329554457	[1123, 293459]	93090977300134793
13	16148168401	[16148168401]	223511436608353935601
17	38771752331201	[14009, 2767631689]	1288498953284568548534420801
19	1899815864228857	[419, 4534166740403]	3093685986836262112339927626793
23	4561457890013486057	[47, 3083, 31479823396757]	17834484070599672225407746556059132793

3.5 素数 $p = \frac{9^n - 1}{8}$ を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<20,9).
n       p                       素因数分解
2       10                      [2,5]
3       91                      [7,13]
5       7381                    [11,11,61]
7       597871                  [547,1093]
11      3922632451              [23,67,661,3851]
13      317733228541            [398581,797161]
17      2084647712458321        [103,307,1021,1871,34511]
19      168856464709124011      [1597,2851,101917,363889]
```

$8\sigma(a) = 9a + 7\mathbf{pmax}(a)$ を満たす a の値は, 表 5 のようになる.

表 5: $a = 9^{n-1}p$

n	$p = \frac{9^n - 1}{8}$	素因数分解	$a = 9^{n-1}p$
2	10	[2,5]	90
3	91	[7,13]	7371
5	7381	[11,11,61]	48426741
7	597871	[547,1093]	317733162111
11	3922632451	[23,67,661,3851]	13677373641003196851
13	317733228541	[398581,797161]	8973724846144626990 4221
17	2084647712458321	[103,307,1021,1871,34511]	38628942978290763136125566 18961
19	168856464709124011	[1597,2851,101917,363889]	2534444948805657119455833694699 4331

4 考察

底が 3 について

素数 $p = \frac{3^n-1}{2} > 1$ で, $a = 3^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が 3 の倍数で, $\underline{2\sigma(a) = 3a + \mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が 3 の倍数で, $\underline{2\sigma(a) = 3a + \mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{3^n-1}{2} > 1$ で, $a = 3^{n-1}p$ が書けるかどうかは解っていない.

証明する必要がある.

底が 5 について

素数 $p = \frac{5^n-1}{4} > 1$ で, $a = 5^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が 5 の倍数で, $\underline{4\sigma(a) = 5a + 3\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が 5 の倍数で, $\underline{4\sigma(a) = 5a + 3\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{5^n-1}{4} > 1$ で, $a = 5^{n-1}p$ が書けるかどうかは解っていない.

証明する必要がある.

底が 7 について

素数 $p = \frac{7^n - 1}{6} > 1$ で, $a = 7^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が 7 の倍数で, $\underline{6\sigma(a) = 7a + 5\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が 7 の倍数で, $\underline{6\sigma(a) = 7a + 5\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{7^n - 1}{6} > 1$ で, $a = 7^{n-1}p$ が書けるかどうかは解っていない.

証明する必要がある.

底が 9 について

素数 $p = \frac{9^n - 1}{8} > 1$ で, $a = 9^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が 9 の倍数で, $\underline{8\sigma(a) = 9a + 7\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が 9 の倍数で, $\underline{8\sigma(a) = 9a + 7\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{9^n - 1}{8} > 1$ で, $a = 9^{n-1}p$ が書けるかどうかは解っていない.

証明する必要がある.