底が一般の完全数

田中裕
学習院大学数学科４年

Contents

1. 目的

底が一般の完全数を考えて研究することを目的とする.

2. 方法

完全数の定義

完全数の正の約数の総和は元の数の**2**倍に等しい.
すなわち,nが完全数であるとは,**約数関数**$\sigma(n)$に対して
$\sigma(n) = 2n$を満たす.

約数関数$\sigma(n)$は,自然数nを変数とする関数で,
nの全ての約数の総和としたものである.
式では,

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \quad (d\text{は}n\text{の約数})$$

と表される.

例えば,
ある数$n=p^e(e>0)$の約数は

$$1, p, p^2, p^3, \cdots, p^e$$

であるから, 約数の総和は

$$\sigma(n)=\sum_{k=0}^{e} p^k = 1+p+p^2+p^2+p^3+\cdots+p^e$$
$$=\frac{p^{e+1}-1}{p-1}$$

また, a, bを互いに素な自然数としたとき,

$$\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$$

この性質を乗法性という.

(例)
$n=12$ のとき,
$12=3\cdot 2^2$ であるから,

$$\sigma(12)=\sigma(3)\sigma(2^2)=(1+3)(1+2+4)=28,$$

つまり,12の約数の総和は28となる.

2.1. 完全数.

偶数の完全数は$2^{n-1}p$と書けることを証明する.

aを偶数の完全数とすると, 奇数kにより
$a = 2^{n-1}k$と表される.

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1})\sigma(k) = (2^n - 1)\sigma(k)$$

仮定より, $\sigma(a) = 2a = 2^n k$. したがって,

$$(2^n - 1)\sigma(k) = 2^n k$$

2^nの項でまとめると,

$$2^n(\sigma(k) - k) = \sigma(k)$$

$\sigma(k)-k$を右辺にも作ると,

$$2^n(\sigma(k)-k) = \underline{\sigma(k)-k}+k$$

が得られる. さらに$(\sigma(k)-k)$の項でまとめると,

$$(2^n-1)(\sigma(k)-k) = k$$

$\sigma(k)-k$はkの**約数**であり, k以外の**約数の和**である.

ここで, $\sigma(k)-k>1$と仮定すると,
kの約数はこのとき,

$$1, \sigma(k)-k, k$$

総和は,

$$\sigma(k) \geq 1 + (\sigma(k) - k) + k = 1 + \sigma(k)$$

となり, 矛盾している.

よって, $\sigma(k) - k = 1$がいえる.
変形すると,

$$\sigma(k) = 1 + k$$

1とkはkの約数なので, kは素数である.

$\sigma(k) - k = 1$を,

$$(2^n - 1)(\sigma(k) - k) = k$$

に代入すると,

$$k = 2^n - 1$$

したがって,

kが素数であれば$2^{n-1}k$は完全数であることがわかった.

$\sigma(a) = 2a$を満たすaをすべて求める.

$p = 2^n - 1 > 1$は素数, $a = 2^{n-1}p$とする.

$\boxed{p = 2^n - 1}$は**メルセンヌ数**といい,特にpが素数のときは,
メルセンヌ素数という.

pが**素数**のとき,nも**素数**になることが知られている.

完全数はメルセンヌ素数と関係が深く,
$p = 2^n - 1$が素数ならば,

$a = 2^{n-1}p$**は完全数**であることが知られてる.

$a = 2^{n-1}p$は定義である,$\sigma(a) = 2a$になるか確認すると,

$$\sigma(a) = \sigma(2^{n-1}p)$$

$$= \sigma(2^{n-1})\sigma(p) \quad (2^{n-1}\text{と}p\text{は互いに素})$$

$$= (2^n - 1)(p + 1)$$

ここで,

$\boxed{p + 1 = 2^n}$とすると,

$$\sigma(a) = 2^n p = 2(2^{n-1}p) = 2a$$

したがって,

aは<u>完全数</u>である.

素数$p = 2^n - 1$を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,2).
```

n	p	素因数分解
2	3	[3]
3	7	[7]
5	31	[31]
7	127	[127]
11	2047	[23, 89]
13	8191	[8191]
17	131071	[131071]
19	524287	[524287]
23	8388607	[47, 178481]
29	536870911	[233, 1103, 2089]

(解説)

左の列はnの値,真ん中はpの値,右の列はpを素因数分解したものである.
このプログラムは$1 \leq n \leq 30$の素数の中で,
pがメルセンヌ素数となる数を探し出したものである.

$\sigma(a)=2a$となるような自然数aを求めると，
表1のようになる．

表1

TABLE 1. 完全数

n	$p=2^n-1$	素因数分解	$a=2^{n-1}p$
2	3	[3]	6
3	7	[7]	24
5	31	[31]	496
7	127	[127]	8128
11	2047	[23, 89]	2096128
13	8191	[8191]	33550336
17	131071	[131071]	8589869056
19	524287	[524287]	137438691328
23	8388607	[47, 178481]	35184367894528
29	536870911	[233, 1103, 2089]	144115187807420416

具体例

例えば,$n=2$のとき, $p=3$でメルセンヌ素数であるから,
$a=6$になる.
また,$\underline{\sigma(6)=\sigma(2)\sigma(3)=(1+2)(1+3)=12}$ なので,
$\sigma(a)=2a$を満たし, **完全数**といえる.

同様に考えると, $a=6, 28, 496, 8128,$ …は完全数であることが解る.

2.2. (底が3のとき).

pmax(a)をaの最大素因子とし.

底が3のときの**完全数**を定義する.

$$p=\frac{3^n-1}{2}>1 \text{は素数}, a=3^{n-1}p \text{とおく}.$$

$$\sigma(a)=\sigma(3^{n-1}p)$$

$$=\sigma(3^{n-1})\sigma(p) \quad (3^{n-1}\text{と}p\text{は互いに素})$$

$$=\frac{3^n-1}{2}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1=\frac{3^n+1}{2}}$ とすると,

$$\sigma(a)=\frac{(3^n+1)}{2}p=\frac{3^np+p}{2}=\frac{3(3^{n-1}p)+p}{2}$$

したがって, pが素数ならば,

$2\sigma(a)=3a+\mathrm{pmax}(a)$ を満たす.

これより,

$2\sigma(a)=3a+\mathrm{pmax}(a)$ を満たすaを
底が3の完全数と定義する.

素数$p=\frac{3^n-1}{2}$を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,3).
```

n	p	素因数分解
2	4	[2, 2]
3	13	[13]
5	121	[11, 11]
7	1093	[1093]
11	88573	[23, 3851]
13	797161	[797161]
17	64570081	[1871, 34511]
19	581130733	[1597, 363889]
23	47071589413	[47, 1001523179]
29	34315188682441	[59, 28537, 20381027]

$2\sigma(a)=3a+\mathrm{pmax}(a)$を満たすような$a$の値は,表2のようになる.

表2

Table 2. $a = 3^{n-1}p$

n	$p = \frac{3^n - 1}{2}$	素因数分解	$a = 3^{n-1}p$
2	4	[2, 2]	12
3	13	[13]	117
5	121	[11, 11]	9801
7	1093	[1093]	796797
11	88573	[23, 3851]	5230147077
13	797161	[797161]	423644039001
17	64570081	[1871, 34511]	2779530261754401
19	581130733	[1597, 363889]	225141952751788437
23	47071589413	[47, 1001523179]	1477156353259726319517
29	34315188682441	[59, 28537, 20381027]	785021449541029367424039801

2.3. (底が5のとき).

底が5のときの完全数を定義する.

$$p = \frac{5^n - 1}{4} > 1 \text{ は素数}, \; a = 5^{n-1} p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(5^{n-1} p)$$

$$= \sigma(5^{n-1})\sigma(p) \quad (5^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{5^n - 1}{4}(p + 1)$$

ここで,

$\boxed{p+1=\frac{5^n+3}{4}}$とすると,

$$\sigma(a)=\frac{(5^n+3)}{4}p=\frac{5^np+3p}{4}=\frac{5(5^{n-1}p)+3p}{4}$$

したがって, pが素数ならば,

$4\sigma(a)=5a+3\mathrm{pmax}(a)$を満たす.

これより,

$4\sigma(a)=5a+3\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$を底が$5$の完全数と定義する.

素数$p=\frac{5^n-1}{4}$を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,5).
```

n	p	素因数分解
2	6	[2, 3]
3	31	[31]
5	781	[11, 71]
7	19531	[19531]
11	12207031	[12207031]
13	305175781	[305175781]
17	190734863281	[409, 466344409]
19	4768371582031	[191, 6271, 3981071]
23	2980232238769531	[8971, 332207361361]
29	4656612873077392578 1	[59, 35671, 2212599644329]

$4\sigma(a)=5a+3\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$の値は,表3のようになる.

表3

Table 3. $a = 5^{n-1}p$

n	$p = \frac{5^n-1}{4}$	素因数分解	$a = 5^{n-1}p$
2	6	[2, 3]	30
3	31	[31]	775
5	781	[11, 71]	488125
7	19531	[19531]	305171875
11	12207031	[12207031]	119209287109375
13	305175781	[305175781]	74505805908203125
17	190734863281	[409, 466344409]	29103830456695556640625
19	4768371582031	[191, 6271, 3981071]	18189894035457611083984375
23	2980232238769531	[8971, 332207361361]	7105427357601001262664794921875
29	46566128730773925781	[59, 35671, 22125996444329]	1734723475976807094402611255645751953125

2.4. (底が7のとき).

底が7のときの完全数を定義する.

$$p = \frac{7^n - 1}{6} > 1 \text{ は素数},\ a = 7^{n-1} p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(7^{n-1} p)$$

$$= \sigma(7^{n-1})\sigma(p) \quad (7^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{7^n - 1}{6}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1=\frac{7^n+5}{6}}$とすると,

$$\sigma(a)=\frac{(7^n+5)}{6}p=\frac{7^np+5p}{6}=\frac{7(7^{n-1}p)+5p}{6}$$

したがって, pが素数ならば,

$6\sigma(a)=7a+5\mathrm{pmax}(a)$を満たす.

これより,

$6\sigma(a)=7a+5\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$を

底が7の完全数と定義する.

素数$p=\frac{7^n-1}{6}$を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<30,7).
```

n	p	素因数分解
2	8	[2, 2, 2]
3	57	[3, 19]
5	2801	[2801]
7	137257	[29, 4733]
11	329554457	[1123, 293459]
13	16148168401	[16148168401]
17	38771752331201	[14009, 2767631689]
19	1899815864228857	[419, 4534166740403]
23	4561457890013486057	[47, 3083, 31479823396757]

$6\sigma(a)=7a+5\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$の値は,表4のようになる.

表4

Table 4. $a = 7^{n-1}p$

n	$p = \frac{7^n-1}{6}$	素因数分解	$a = 7^{n-1}p$
2	8	[2, 2, 2]	56
3	57	[3, 19]	2793
5	2801	[2801]	6725201
7	137257	[29, 4733]	16148148793
11	329554457	[1123, 293459]	93090977300134793
13	16148168401	[16148168401]	223511436608353935601
17	38771752331201	[14009, 2767631689]	1288498953284568548534420801
19	1899815864228857	[419, 4534166740403]	3093685986836262112339927626793
23	4561457890013486057	[47, 3083, 31479823396757]	17834484070599672225407746556059132793

2.5. (底が9のとき).

<u>底が9のとき</u>の完全数を定義する.

$$p = \tfrac{9^n - 1}{8} > 1 \text{ は素数}, \; a = 9^{n-1} p \text{ とおく}.$$

$$\sigma(a) = \sigma(9^{n-1}p)$$

$$= \sigma(9^{n-1})\sigma(p) \quad (9^{n-1} \text{ と } p \text{ は互いに素})$$

$$= \frac{9^n - 1}{8}(p+1)$$

ここで,

$\boxed{p+1=\frac{9^n+7}{8}}$とすると,

$$\sigma(a)=\frac{(9^n+7)}{8}p=\frac{9^np+7p}{8}=\frac{9(9^{n-1}p)+7p}{8}$$

したがって, pが素数ならば,

$8\sigma(a)=9a+7\mathrm{pmax}(a)$を満たす.

これより,

$8\sigma(a)=9a+7\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$を
底が9の完全数と定義する.

素数$p=\frac{9^n-1}{8}$を以下のプログラムで求めてみる.

```
?- prm2(2=<20,9).
```

n	p	素因数分解
2	10	[2,5]
3	91	[7,13]
5	7381	[11,11,61]
7	597871	[547,1093]
11	3922632451	[23,67,661,3851]
13	317733228541	[398581,797161]
17	2084647712458321	[103,307,1021,1871,34511]
19	168856464709124011	[1597,2851,101917,363889]

$8\sigma(a)=9a+7\mathrm{pmax}(a)$を満たす$a$の値は,表5のようになる.

表 5

TABLE 5. $a = 9^{n-1}p$

n	$p = \frac{9^n - 1}{8}$	素因数分解	$a = 9^{n-1}p$
2	10	[2,5]	90
3	91	[7,13]	7371
5	7381	[11,11,61]	48426741
7	597871	[547,1093]	317733162111
11	3922632451	[23,67,661,3851]	13677373641003196851
13	317733228541	[398581,797161]	8973724846144626990 4221
17	2084647712458321	[103,307,1021,1871,34511]	386289429782907631361255661 8961
19	168856464709124011	[1597,2851,101917,363889]	2534444948805657119455833694 6994331

3. 考察

底が3について

素数 $p=\frac{3^n-1}{2}>1$ で, $a=3^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が3の倍数で, $\underline{2\sigma(a)=3a+\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が3の倍数で, $\underline{2\sigma(a)=3a+\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p=\frac{3^n-1}{2}>1$ で, $a=3^{n-1}p$ が書けるかどうか

は解っていない. 証明する必要がある.

底が5について

素数 $p = \frac{5^n - 1}{4} > 1$ で, $a = 5^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が5の倍数で, $\underline{4\sigma(a) = 5a + 3\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

今後の課題

a が5の倍数で, $\underline{4\sigma(a) = 5a + 3\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{5^n - 1}{4} > 1$ で, $a = 5^{n-1}p$ が書けるかどうか

は解っていない. 証明する必要がある.

底が7について

素数 $p = \frac{7^n - 1}{6} > 1$ で, $a = 7^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が7の倍数で, $\underline{6\sigma(a) = 7a + 5\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

<u>今後の課題</u>

a が7の倍数で, $\underline{6\sigma(a) = 7a + 5\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{7^n - 1}{6} > 1$ で, $a = 7^{n-1}p$ が書けるかどうか

は解っていない. 証明する必要がある.

底が9について

素数 $p = \frac{9^n - 1}{8} > 1$ で, $a = 9^{n-1}p$ を満たす.

$\Longrightarrow$ a が9の倍数で, $\underline{8\sigma(a) = 9a + 7\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

<u>今後の課題</u>

a が9の倍数で, $\underline{8\sigma(a) = 9a + 7\mathrm{pmax}(a)}$ を満たす.

$\Longrightarrow$ 素数 $p = \frac{9^n - 1}{8} > 1$ で, $a = 9^{n-1}p$ が書けるかどうか

は解っていない. 証明する必要がある.