$\dfrac{1}{6p}$ の 7 進展開についての研究

牛久 美波
学習院大学理学部数学科

平成 25 年 1 月 31 日

目 次

1　目的

まずはじめに、次のような例について考える。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

すると循環節 [142857] を得る。この循環節を半分に分けて足すと

$$142 + 857 = 999$$

一般に、「奇素数 p について $\dfrac{1}{p^r}$ の循環節の長さが偶数の時、循環節を半分に分けて加えると 9 が並ぶこと」はよく知られている。
この研究においては、2000 以下の自然数 N を分母とし、$\dfrac{1}{N}$ を小数に g 進展開した時の循環節をリストで $[q_1, q_2, \cdots, q_M]$ と表示する。
これらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数（２分割和）について、どのような性質が成り立つのか考える。
今回は、特に $N = 6p(p \geq 5,$ 奇素数$)$ を分母とし、７進数展開するものについて研究する。

2　方法

プログラム SWI-Prolog を使用する。

```
/*繰り返し*/
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
I1 is I+1,
for(I1=<J,K).

/*最大公約数*/
gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):-B1 is A mod B,
A1=B,
gcd(D=(A1,B1)).

/*素因数分解の結果を表示*/
factor(P/2):-Q is P//2,P=:=2*Q,!.
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),
for(1=<P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
P=:=J1*Q,I=J1,!.
factor(P/P):-!.
```

```
factorize(P,[P]):-factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):-factor(P/I),
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.

/*A<B の素数の表示*/
prime_list(A<B):-for(A=<B,N),
factorize(N,List),write(N=List),nl,fail.
prime_list(A<B).

/*循環小数の循環節*/
j(A/B,W,P):-A<B,!,
j_aux([A/B,W],A,0,[],P0),
reverse(P0,P).
j_aux([A/B,W],A,R,P,P):-R>0,!.
j_aux(Const,A0,R,L,P):-Const=[A/B,W],
!,A1 is A0*W,
res_q(A1=B*Q+R1),
L1=[Q|L],
j_aux(Const,R1,R1,L1,P).

/*商と余り*/
res_q(A=B*Q+R):-Q is A//B,
R is A-B*Q.

/*A/B を G 進数で循環節に直したときのリストと長さ*/
lj(A/B,G,L1) :- lj(A/B,G,L1,_).
lj(A/B,G,L1,RL1):- A<B,
lj_aux([A/B,G],A,0,L,[],RL,[]),
reverse(L,L1),reverse(RL,RL1).

lj_aux([A/B,G],A,R,L,L,RL,RL):- R>0,!.
lj_aux(Const,A0,R,L,W,RL1,RL2):-
        Const = [A/B,G],
        A1 is A0 * G,
        res_q(A1 = B*Q + R1),
lj_aux(Const,R1,R1,L,[Q|W],RL1,[R1|RL2]).

/*リストの二分割*/
left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,
N1 is N-1,!,
```

```
left(A=B1+[X|C],N1),
append0(B=B1+[X]),!.

/*リストの長さが偶数ならば二分割する*/
even_list(W,V+V0):-length(W,K),
K=:=(K//2*2),
K1 is K//2,
left(W=V+V0,K1).

/*リストの結合*/
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).

/*数字をリストに直す*/
num_list(N,L,G):-N<G,L=[N],!.
num_list(N,L,G):-N1 is N//G,M is N mod G,
num_list(N1,L1,G),
append0(L=L1+[M]).

/*リストを数字に直す*/
list_num([N],N,G):-N<G,!.
list_num(L,W,G):-append0(L=L1+[N]),
list_num(L1,N1,G),W is N1*G+N.

/*1/p の分割和*/
p_list(N,W):-j(1/N,W,X),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,W),
list_num(Y2,B,W),
        AB is A+B,
num_list(AB,C,W),
factorize(N,L),length(L,S),
write(N),put(9),write(L),put(9),write(S),put(9),
write(C),nl.

all_2(I=<J,G):- for(I=<J,P),
gcd(D=(G,P)),n
D=:=1,
write(1/P),nl,

p_list(P,G),
fail.
all_2(I=<J,G).
```

```
pp_list(A<B,W):- for(A=<B,N),
gcd(M=(W,N)),
M=:=1,
write(N),nl,
p_list(N,W),
fail.
pp_list(A<B,W).

/*1/6pの分割和*/
m_list(N,W):-j(1/N,W,X),
even_list(X,Y1+Y2),
list_num(Y1,A,W),
list_num(Y2,B,W),
        AB is A+B,
num_list(AB,C,W),
factorize(N,L),length(L,S),
write(N),put(9),write(L),put(9),write(S),put(9),
    write(C),nl.

all_2(I=<J,G):- for(I=<J,P),
gcd(D=(G,P)),n
D=:=1,
write(1/P),nl,
    m_list(P,G),
fail.
all_2(I=<J,G).

mm_list(A<B,W):- for(A=<B,N),
gcd(M=(W,N)),
M=:=1,
factorize(N,L),
L=[2,3,P],
write(L=N),nl,
m_list(N,W),
fail.
mm_list(A<B,W).

/*7^m+1の素因数分解*/
factorize7(M,L):-N is 7^M+1,
factorize(N,L),write(N=L),nl.
```

3　結果

具体例

- $p=11$ の場合

$\dfrac{1}{6p}=\dfrac{1}{66}$ を 7 進数展開する。

$$\frac{1}{66}=0.\dot{0}051243632\dot{2}$$

循環節 [0051243632] を 2 分割すると、[00512] と [43632] になる。
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 00512 \\ +) & 43532 \\ \hline & 44444 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{66}$ の 7 進展開での 2 分割和は [44444] となる。

- $p=43$ の場合

$\dfrac{1}{6p}=\dfrac{1}{258}$ を 7 進数展開する。

$$\frac{1}{258}=0.\dot{0}0122\dot{1}$$

循環節 [001221] を 2 分割すると、[001] と [221] になる。
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 001 \\ +) & 221 \\ \hline & 222 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{258}$ の 7 進展開での 2 分割和は [222] となる。

表

プログラム $mm-list(5<2000,7)$ の結果より、$\dfrac{1}{6p}$ の 7 進展開の 2 分割和の規則性を考える。

注：[4, ,(20)] は 4 が 20 個並ぶことを表す。

表 1: $\dfrac{1}{6p}$ の 2 分割和

分母 $6p$	素因数分解	分割和
30	[2, 3, 5]	[4, 4]
66	[2, 3, 11]	[4, 4, 4, 4, 4]
78	[2, 3, 13]	[2, 2, 2, 2, 2, 2]
102	[2, 3, 17]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
138	[2, 3, 23]	[4, ,(11)]
246	[2, 3, 41]	[4, ,(20)]
258	[2, 3, 43]	[2, 2, 2]
318	[2, 3, 53]	[4, ,(13)]
366	[2, 3, 61]	[2, ,(30)]
402	[2, 3, 67]	[2, ,(33)]
426	[2, 3, 71]	[4, ,(35)]
438	[2, 3, 73]	[2, ,(12)]
474	[2, 3, 79]	[2, ,(39)]
534	[2, 3, 89]	[4, ,(44)]
582	[2, 3, 97]	[2, ,(48)]
606	[2, 3, 101]	[4, ,(50)]
642	[2, 3, 107]	[4, ,(53)]
678	[2, 3, 113]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
762	[2, 3, 127]	[2, ,(63)]
822	[2, 3, 137]	[4, ,(34)]
894	[2, 3, 149]	[4, ,(37)]
906	[2, 3, 151]	[2, ,(75)]
942	[2, 3, 157]	[2, ,(26)]
978	[2, 3, 163]	[2, ,(81)]
1038	[2, 3, 173]	[4, ,(86)]
1074	[2, 3, 179]	[4, ,(89)]
1086	[2, 3, 181]	[2, 2, 2, 2, 2, 2]
1146	[2, 3, 191]	[4, 4, 4, 4, 4]
1158	[2, 3, 193]	[2, (12)]
1182	[2, 3, 197]	[4, ,(49)]
1266	[2, 3, 211]	[2, ,(105)]
1374	[2, 3, 229]	[2, ,(114)]
1398	[2, 3, 233]	[4, ,(58)]
1434	[2, 3, 239]	[4, ,(119)]
1446	[2, 3, 241]	[2, ,(120)]
1542	[2, 3, 257]	[4,,(129)]
1578	[2, 3, 263]	[4, ,(132)]
1614	[2, 3, 269]	[4, ,(135)]
1662	[2, 3, 277]	[2, ,(69)]
1686	[2, 3, 281]	[4, ,(10)]
1758	[2, 3, 293]	[4, ,(147)]

表 2: 2 分割和に 4 が並ぶもの

分母 $6p$	素因数分解	分割和
30	[2, 3, 5]	[4, 4]
66	[2, 3, 11]	[4, 4, 4, 4, 4]
102	[2, 3, 17]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
138	[2, 3, 23]	[4, ,(11)]
246	[2, 3, 41]	[4, ,(20)]
318	[2, 3, 53]	[4, ,(13)]
426	[2, 3, 71]	[4, ,(35)]
534	[2, 3, 89]	[4, ,(44)]
606	[2, 3, 101]	[4, ,(50)]
642	[2, 3, 107]	[4, ,(53)]
678	[2, 3, 113]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
822	[2, 3, 137]	[4, ,(34)]
894	[2, 3, 149]	[4, ,(37)]
1038	[2, 3, 173]	[4, ,(86)]
1074	[2, 3, 179]	[4, ,(89)]
1146	[2, 3, 191]	[4, 4, 4, 4, 4]
1182	[2, 3, 197]	[4, ,(49)]
1398	[2, 3, 233]	[4, ,(58)]
1434	[2, 3, 239]	[4, ,(119)]
1542	[2, 3, 257]	[4, ,(129)]
1578	[2, 3, 263]	[4, ,(132)]
1614	[2, 3, 269]	[4, ,(135)]
1686	[2, 3, 281]	[4, ,(10)]
1758	[2, 3, 293]	[4, ,(147)]

表 3: 2 分割和に 2 が並ぶもの

分母 $6p$	素因数分解	分割和
78	[2, 3, 13]	[2, 2, 2, 2, 2, 2]
258	[2, 3, 43]	[2, 2, 2]
366	[2, 3, 61]	[2, ,(30)]
402	[2, 3, 67]	[2, ,(33)]
438	[2, 3, 73]	[2, ,(12)]
474	[2, 3, 79]	[2, ,(39)]
582	[2, 3, 97]	[2, ,(48)]
762	[2, 3, 127]	[2, ,(63)]
906	[2, 3, 151]	[2, ,(75)]
942	[2, 3, 157]	[2, ,(26)]
978	[2, 3, 163]	[2, ,(81)]
1086	[2, 3, 181]	[2, 2, 2, 2, 2, 2]
1158	[2, 3, 193]	[2, ,(12)]
1266	[2, 3, 211]	[2, ,(105)]
1374	[2, 3, 229]	[2, ,(114)]
1446	[2, 3, 241]	[2, ,(120)]
1662	[2, 3, 277]	[2, ,(69)]

4 考察

結果より p に着目すると、以下の推測ができる。

$N = 6p(p \geq 5,$ 奇素数$)$ となる自然数 N について $\frac{1}{N}$ の 7 進展開の 2 分割和について

- パターン 1
  $p \equiv 5 \bmod 6$ のとき、循環節を 2 分割することができれば 2 分割和は [4,4,$\cdots$,4,4]

- パターン 2
  $p \equiv 1 \bmod 6$ のとき、循環節を 2 分割することができれば 2 分割和は [2,2,$\cdots$,2,2]

以下、この推測が正しいことを証明する。

5　一般的な理論と証明

5.1　記号の定義と準備

周期

$\frac{1}{b}$ を小数に g 進展開したとき、循環節の周期 u を λ を使って $u = \lambda(b)$ と表す。

位数

g と b が互に素なら $u = \lambda(b)$ は $\mathrm{mod}\, b$ での g の位数。つまり $g^u \equiv 1 \bmod b$ を満たす最小の正の数が u である。

ベルヌーイの定理

g と b が互に素で b と c も互に素なら $\lambda(bc) = lcm(\lambda(b), \lambda(c))$

5.2　一般的な理論

等比数列

既約の真分数 $\frac{a}{b}$ を小数に g 進展開することを考える。ただし、g と b は互いに素で a と b も互に素とする。$a < b$ なので、a を b で割っても商が 0、余りは a のままなので、ga を b でわると

$$ga = q_1 b + r_1$$

更に gr_1 を b でわると

$$gr_1 = q_2 b + r_2$$

これを繰り返す。

$$gr_2 = q_3 b + r_3$$

$$\vdots$$

$$gr_j = q_{j+1} b + r_{j+1} (j = 1, 2, 3, \cdots)$$

b を法として考えると、

$$ga \equiv r_1 \bmod b$$

$$\vdots$$

$$gr_{j-1} \equiv r_j \bmod b (j = 1, 2, 3, \cdots)$$

上記より

$$r_1 \equiv ga \bmod b$$

$$r_2 \equiv gr_1 = g \cdot ga = g^2 a \bmod b$$

$$\vdots$$

$$r_j \equiv gr_{j-1} = g^j a \bmod b$$

r_j が b を法としたとき公比 g の等比数列となる ことがいえる。

周期性

g と b が互いに素ならば、$u = \lambda\ (b)$ は、mod b での g の位数と同じ。
$g^u \equiv 1 \mod b$ と $r_j \equiv g^j a \mod b$ により、

$$r_u \equiv g^u a \equiv a \equiv r_0 \mod b$$
$$r_{u+1} \equiv g^{u+1} a \equiv ga \equiv r_1 \mod b$$
$$r_{u+2} \equiv g^{u+2} a \equiv g^2 a \equiv r_2 \mod b$$

などが成り立ち、一般に

$$r_{u+j} \equiv g^{u+j} a \equiv g^j a \equiv r_j \mod b$$

以上のことから、

$$r_{u+j} \equiv r_j \mod b \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ。
一方、$r_{u+j} < b$, $r_j < b$ より、

$$r_{u+j} = r_j$$

従って、

$$r_u = r_0$$
$$r_{u+1} = r_1$$
$$r_{u+2} = r_2$$
$$\vdots$$

となり、u ごとに同じ値が繰り返されるので、数列 r_j は 周期 u を持つ ことがわかった。
次に商の列 $q_1, q_2, \cdots$ についても周期性を考える。商は、$gr_{j-1} = bq_j + r_j$ により、

$$q_j = \frac{gr_{j-1} - r_j}{b}$$

ここで、周期性 $r_{j-1+u} = r_{j-1}$, $r_{j+u} = r_j$ に注意すると、

$$q_{j+u} = \frac{gr_{j+u-1} - r_{j+u}}{b} = \frac{gr_{j-1} - r_j}{b} = q_j$$

これにより、数列 q_j は周期 u を持つことがわかった。
g と b が互いに素であれば、既約真分数 $\dfrac{a}{b}$ を小数に展開するとき、最初から循環節が始まることが導かれた。このとき**純循環する**という。

以上から次の定理がわかる。
u を mod$b$ での g の位数とすると、これは分数 $\dfrac{a}{b}$ を g 進小数展開したときの循環節の長さになり、$j = 0, 1, 2, \cdots$ について、$r_j \equiv g^j a \bmod b$ また、数列 r_j, q_j は周期をもつ。

以上の論法を $b = 6p (p \geq 5,$ 奇素数$)$ と $g = 7$ の場合に適用する。

5.3 証明

以上をふまえ、

・$p \equiv 5 \bmod 6$ のとき
循環節の長さが偶数ならば 2 分割和は $[4, 4, \cdots, 4, 4]$
・$p \equiv 1 \bmod 6$ のとき
循環節の長さが偶数ならば 2 分割和は $[2, 2 \cdots, 2, 2]$

この定理を証明する。

以下 $g = 7$ とする。すると、$7 \equiv 1 \bmod 6$ により $\lambda(6) = 1$ が成り立つので、素数 $p \geq 5$ について $u = \lambda(6p) = \lambda(p)$ が成立する。
周期 u が偶数のとき、$u = 2m$ とすると、周期の定義より

$$g^u = g^{2m} \equiv 1, \quad g^m \not\equiv 1 \bmod 6p$$

が成り立ちます。そこで、法の条件を 6 と p に分けると次の連立合同式が成立する。

$$g^{2m} \equiv 1 \bmod p, \quad g^{2m} \equiv 1 \bmod 3, \quad g^{2m} \equiv 1 \bmod 2$$

2 と 3 と p は素数なので、

$$g^m \equiv \pm 1 \bmod p,\ g^m \equiv \pm 1 \bmod 3,\ g^m \equiv \pm 1 \bmod 2$$

$g = 7$ なので、$7^m \equiv 1 \bmod 2,\ 7^m \equiv 1 \bmod 3$ より、$g^m \equiv 7^m \equiv 1 \bmod 6$ となる。よって、

$$\underline{g^m \equiv -1 \bmod p}$$

が導かれる。これより、

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} \equiv ag^j g^m \equiv -ag^j \equiv -r_j \bmod p$$

$$r_{j+m} \equiv -r_j \bmod p$$

$$r_{j+m} + r_j \equiv 0 \bmod p$$

が成り立ち、$r_j + r_{j+m}$ は p の倍数なので、

$$r_j + r_{j+m} = k_j p$$

と正整数 k_j を使って表せる。
さらに、$j = m$ のとき $r_m + r_{2m} = k_m p$、$j = 0$ のとき $r_m + r_0 = k_0 p$、周期性 $r_{j+u} = r_j$ より $r_0 = r_u = r_{2m}$ なので、

$$k_m = k_0$$

が成り立つことに注意しておく。

一方、$b=6p$ だったので、

$$gr_j = 6pq_{j+1} + r_{j+1},\ gr_{j+m} = 6pqj + m + 1 + r_{j+m+1}$$

をたすと、

$$\begin{array}{rccc} & gr_j & = & 6pq_{j+1} + r_{j+1} \\ +) & gr_{j+m} & = & 6pqj + m + 1 + r_{j+m+1} \\ \hline & g(r_j + r_{j+m}) & = & 6p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) \end{array}$$

をえる。そこで、$Q_j = q_j + q_{j+1}$ とおけば、

$$gk_j = 3Q_{j+1} + k_{j+1}$$

となる。これらを $j = 0, 1, 2, \cdots$ について考えると、

$$gk_0 = 6Q_1 + k_1$$

$$gk_1 = 6Q_2 + k_2$$

$$gk_2 = 6Q_3 + k_3$$

$$\vdots$$

$$gk_{m-1} = 6Q_m + k_m$$

最初の行に g_{m-1} を、次に g_{m-2} を掛けなどしてからこれらを加えると、

$$\begin{array}{rccc} & g^m k_0 & = & 6g^{m-1}Q_1 + g^{m-1}k_1 \\ & g^{m-1}k_1 & = & 6g^{m-2}Q_2 + g^{m-2}k_2 \\ & & \vdots & \\ +) & g^{m-1}k_1 & = & 6g^{m-2}Q_2 + g^{m-2}k_2 \\ \hline & g^m k_0 + g^{m-1}k_1 + \cdots + gk_{m-1} & = & 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + g^{m-1}k_1 + \cdots + k_m \\ & g^m k_0 & = & 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + k_m \end{array}$$

つまり、

$$(g^m - 1)k_0 = 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m)$$
$$\frac{g^m - 1}{6} = g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$$

$g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$ をとくに $\langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rangle$ と書く。$Q_j = q_j + q_{j+m}$ だったので、これは循環節の二分割和である。この二分割和を Z をおくと $Z = \langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rangle$ となり、

$$\underline{Z = \frac{7^m - 1}{6} k_0 = \langle 11 \cdots 1 \rangle_7 \cdot k_0}$$

k_0 の決定

分子 $a=1(r=1)$ のとき k_0 が何になるかを考える。$r_0+r_m=k_0p$ および余りの性質から

$$r0=a=1, r_m \leq 6p-1$$

$$r_m+1 \leq 6p$$

$$k_0p \leq 6p$$

$$\underline{k_0 \leq 6}$$

$k_0=6$ とすると、

$$r_0+r_m=6p$$

$$r_m=6p-1$$

$$r_m \equiv g^m \bmod 6 \equiv 1 \bmod 6$$

$$6p-1 \equiv -1 \bmod 6$$

矛盾するので、$k_0 \neq 6$ とわかる。よって、$k_0=1,2,3,4,5$ のいずれかである。

また、$r_0=1(\text{奇数}), g=7(\text{奇数}), 6p(\text{偶数})$ より、$gr_0(\text{奇数})-q_16p(\text{偶数})=\underline{r_1(\text{奇数})}$ となる。
これを繰り返すと、余りは常に奇数になる。
よって、$\underline{kjp(\text{偶数})}=r_j(\text{奇数})+r_{j+m}(\text{奇数})$ となるので、k_j は偶数とわかる。
ゆえに、$\underline{k_0=2,4}$.

一方、$r_m \equiv ag^m \equiv g^m \bmod 6p$ だったので、

$$k_0p=r_0+r_m=1+r_m \equiv 1+g^m \bmod 6p$$

また、$7^m \equiv 1 \bmod 6$ より、

$$1+g^m \equiv 2 \bmod 6$$

よって、

$$k_0p \equiv 2 \bmod 6$$

いま $k_0=2,4$ であった。$k_0=2 \equiv 2 \bmod 6$ より $p \equiv 1 \bmod 6$ となり、このとき

$$Z=\frac{7^m-1}{6}k_0=\langle 22\cdots 2\rangle_7$$

$k_0=4 \equiv -2 \bmod 6$ より $p \equiv -1 \bmod 6$ となり、このとき

$$Z=\frac{7^m-1}{6}k_0=\langle 44\cdots 4\rangle_7$$

ゆえに
・$p \equiv 5 \bmod 6$ のとき、循環節の長さが偶数ならば二分割和は $[4,4,\cdots,4,4]$
・$p \equiv 1 \bmod 6$ のとき 、循環節の長さが偶数ならば二分割和は $[2,2\cdots,2,2]$
であることが証明された。

6 付録

m を半周期とすると、$g^m \equiv -1 \bmod p$ より $g^m + 1 = kp$ と書き表せるので、$g^m + 1$ は素因数 p を持つ。つまり、

周期（循環節の長さ）について

g 進数展開のとき、m を半周期とする分数の分母の素因数 p は、$\underline{g^m + 1 \text{ の約数}}$ になる。

であることがわかった。

具体例

- $m = 3, g = 10$ の場合

$$10^3 + 1 = 1001 = [7, 11, 13]$$

となるので、$\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{13}$ の半周期は 3、周期は 6 だとわかる。
ただし、$\dfrac{1}{11}$ の半周期は 1、周期は 2。

- $m = 5, g = 7$ の場合

$$7^5 + 1 = 16808 = [2, 2, 2, 11, 191]$$

となるので、$\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{191}$ の半周期は 5、周期は 10 だとわかる。
ただし、$\dfrac{1}{2}$ の周期は 1。

7　今後の課題

「p がどんな値のときに 2 や 4 が並ぶか」はわかりましたが、2 や 4 が並ぶ個数に関する規則性は発見できていません。
プログラム $mm-list$ を使い、p が 5000 のときまで調べ、「循環節の中に並ぶ 2 や 4 の個数と p との関係性」を見つけることが今後の課題です。

8　感想

プログラム SWI-Prolog は初めて使い、慣れるまでは大変でした。ですが、エラーを繰り返しながらも成功したときはとても達成感がありました。証明がなかなか進まず悩んだりもしましたが、飯高先生や他のゼミ生の力を借りて最後まで論文を書くことが出来ました。今後の課題が残ってしまったのは悔しいですが、２分割和のパターンや周期の性質を見つけることができてよかったです。
ありがとうございました！