$\dfrac{1}{6P}$ の7進展開についての研究

牛久 美波
学習院大学理学部数学科

CONTENTS

1. 目的

例）$\frac{1}{p}$の１０進数展開

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環節$[142857]$を半分に分けて足すと

$$142 + 857 = 999$$

一般に、奇素数pについて$\frac{1}{p^r}$の循環節の長さが偶数の時、
循環節を半分に分けて加えると9が並ぶ。

例）$\frac{1}{p}$ の 7 進数展開

$$\frac{1}{11} = 0.\dot{0}43116235\dot{5}$$

循環節 [0431162355] を半分に分けて足すと

$$04311 + 62355 = 66666$$

一般に、奇素数 p について $\frac{1}{p^r}$ を g 進数展開したときの分割和には $g-1$ が並ぶ。

$b=3p,7p$などについては、研究が進んでいる。
$b=kp$かつkが素数でない場合、最も簡単な例は、素数を 2 つかけあわせた$k=2\times 2=4$である。

これについては、2011 年度小山さんが研究を行った。
今回は、$k=3\times 2=6$、つまり$p=6p$となるので 7 進数展開について考える。

本研究の目的

分母が$6p(p\geq 5,$奇素数$)$のときの分数の 7 進数展開の 2 分割和について研究する。

2. 結果

例１）$p = 11$ の場合

$\dfrac{1}{6p} = \dfrac{1}{66}$ を７進数展開する。

$$\frac{1}{66} = 0.\dot{0}051243632\dot{2}$$

[0051243632] を２分割すると、[00512] と [43632] になる。

$$\begin{array}{rr} & 00512 \\ +) & 43532 \\ \hline & 44444 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{66}$ の７進展開での２分割和は [44444] となる。

例２）$p=43$ の場合

$\dfrac{1}{6p}=\dfrac{1}{258}$ を７進数展開する。

$$\frac{1}{258}=0.\dot{0}0122\dot{1}$$

[001221] を２分割すると、[001] と [221] になる。

$$\begin{array}{rr} & 001 \\ +) & 221 \\ \hline & 222 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{258}$ の７進展開での２分割和は [222] となる。

プログラム $mm-list(5<2000,7)$ の結果より、$\dfrac{1}{6p}$ の 7 進展開の 2 分割和の規則性を考える。

注意：[4, , (20)] は 4 が 20 個並ぶことを表す。

Table 1: $\dfrac{1}{6p}$ の分割和

分母 $6p$	素因数分解	分割和
30	[2, 3, 5]	[4, 4]
66	[2, 3, 11]	[4, 4, 4, 4, 4]
78	[2, 3, 13]	[2, 2, 2, 2, 2]
102	[2, 3, 17]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
⋮	⋮	⋮
1614	[2, 3, 269]	[4, ,(135)]
1662	[2, 3, 277]	[2, ,(69)]
1686	[2, 3, 281]	[4, ,(10)]
1758	[2, 3, 293]	[4, ,(147)]

Table 2. 分割和に 4 が並ぶもの

分母 $6p$	素因数分解	分割和
30	[2, 3, 5]	[4, 4]
66	[2, 3, 11]	[4, 4, 4, 4, 4]
102	[2, 3, 17]	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
138	[2, 3, 23]	[4, ,(11)]
246	[2, 3, 41]	[4, ,(20)]
318	[2, 3, 53]	[4, ,(13)]
⋮	⋮	⋮
1542	[2, 3, 257]	[4, ,(129)]
1578	[2, 3, 263]	[4, ,(132)]
1614	[2, 3, 269]	[4, ,(135)]
1686	[2, 3, 281]	[4, ,(10)]
1758	[2, 3, 293]	[4, ,(147)]

TABLE 3. 分割和に 2 が並ぶもの

分母 $6p$	素因数分解	分割和
78	[2, 3, 13]	[2, 2, 2, 2, 2, 2]
258	[2, 3, 43]	[2, 2, 2]
366	[2, 3, 61]	[2, ,(30)]
402	[2, 3, 67]	[2, ,(33)]
438	[2, 3, 73]	[2, ,(12)]
474	[2, 3, 79]	[2, ,(39)]
⋮	⋮	⋮
1158	[2, 3, 193]	[2, ,(12)]
1266	[2, 3, 211]	[2, ,(105)]
1374	[2, 3, 229]	[2, ,(114)]
1446	[2, 3, 241]	[2, ,(120)]
1662	[2, 3, 277]	[2, ,(69)]

3. 考察

結果よりpに着目すると、以下の推測ができる。

$\frac{1}{6p}$の７進展開の２分割和について

・ $p \equiv 5 \bmod 6$ のとき

二分割和は$[4, 4, \cdots, 4, 4]$

・ $p \equiv 1 \bmod 6$ のとき

二分割和は$[2, 2 \cdots, 2, 2]$

この２つの場合にわけて考察する。

以下、この推測が正しいことを証明する。

4. 証明

$g = 7$. $7 \equiv 1 \bmod 6$ より $\lambda(6) = 1$. $u = \lambda(6p) = \lambda(p)$.
周期 $u = 2m$（偶数）とすると、

$$g^u = g^{2m} \equiv 1, g^m \not\equiv 1 \bmod 6p$$

法の条件を 6 と p に分けると、

$$g^{2m} \equiv 1 \bmod p, g^{2m} \equiv 1 \bmod 3, g^{2m} \equiv 1 \bmod 2$$

2 と 3 と p は素数より、

$$g^m \equiv \pm 1 \bmod p,\ g^m \equiv \pm 1 \bmod 3,\ g^m \equiv \pm 1 \bmod 2$$

$7^m \equiv 1 \bmod 2,\ 7^m \equiv 1 \bmod 3$ より、$g^m \equiv 7^m \equiv 1 \bmod 6$.
よって、

$$g^m \equiv -1 \bmod p$$

これより、

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} \equiv ag^j g^m \equiv -ag^j \equiv -r_j \bmod p$$
$$r_{j+m} \equiv -r_j \bmod p, r_{j+m} + r_j \equiv 0 \bmod p$$

$r_j + r_{j+m}$はpの倍数なので、

$$r_j + r_{j+m} = k_j p$$

と正整数k_jを使って表せる。

$j = m$のとき$r_m + r_{2m} = k_m p$、$j = 0$のとき$r_m + r_0 = k_0 p$、
周期性$r_{j+u} = r_j$より$r_0 = r_u = r_{2m}$なので、

$$k_m = k_0$$

$b = 6p$ より、

$gr_j = 6pq_{j+1} + r_{j+1}$, $gr_{j+m} = 6pqj + m + 1 + r_{j+m+1}$
をたすと、

$$\begin{array}{rccc} & gr_j & = & 6pq_{j+1} + r_{j+1} \\ +) & gr_{j+m} & = & 6pqj + m + 1 + r_{j+m+1} \\ \hline & g(r_j + r_{j+m}) & = & 6p(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + k_{j+1} \end{array}$$

$Q_j = q_j + q_{j+m}$ とおけば、

$$gk_j = 6Q_{j+1} + k_{j+1}$$

これらを$j = 0, 1, 2, \cdots$について考えると、

$$\begin{aligned} gk_0 &= 6Q_1 + k_1 \\ gk_1 &= 6Q_2 + k_2 \\ &\vdots \\ gk_{m-1} &= 6Q_m + k_m \end{aligned}$$

最初の行にg_{m-1}を、
次にg_{m-2}を掛けなどしてからこれらを加えると、

$$\begin{array}{lccc} & g^m k_0 & = & 6g^{m-1}Q_1 + g^{m-1}k_1 \\ & g^{m-1}k_1 & = & 6g^{m-2}Q_2 + g^{m-2}k_2 \\ & & \vdots & \\ +) & gk_{m-1} & = & 6Q_m + gk_m \\ \hline & g^m k_0 + g^{m-1}k_1 + \cdots + gk_{m-1} & = & 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + g^{m-1}k_1 + \cdots + k_m \\ & g^m k_0 & = & 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m) + k_m \end{array}$$

$$(g^m-1)k_0 = 6(g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m)$$
$$\frac{g^m-1}{6}k_0 = g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$$

$g^{m-1}Q_1 + g^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$ を $\langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rangle$ と書く。

$Q_j = q_j + q_{j+m}$ だったので、これは循環節の 2 分割和である。これを Z をおくと $Z = \langle Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rangle_g$ となり、

$$Z = \frac{7^m-1}{6}k_0 = \frac{\langle 66\cdots 6 \rangle_7}{6}k_0 = \langle 11\cdots 1 \rangle_7 k_0$$

k_0の決定

$r_0 + r_m = k_0 p$および余りの性質から

$$r0 = a = 1, r_m \leq 6p - 1$$

$$r_m + 1 \leq 6p, k_0 p \leq 6p$$

$$k_0 \leq 6$$

$k_0 = 6$とすると、

$$r_0 + r_m = 6p, r_m = 6p - 1$$

$$r_m \equiv g^m \bmod 6 \equiv 1 \bmod 6$$

$$6p - 1 \equiv -1 \bmod 6$$

矛盾するので、$k_0 \neq 6.$

よって、$k_0 = 1, 2, 3, 4, 5$のいずれかである。

$r_0 = 1$、$g = 7$、$6p$、(奇数)-(偶数)=(奇数)なので
$gr_0 - q_1 6p = r_1$より、r_1は奇数。

これを繰り返すと、余りr_jは常に奇数。
$k_j p = r_j + r_{j+m}$、(奇数)+(奇数)=(偶数)よりk_jは偶数。
ゆえに、$k_0 = 2, 4$

$r_m \equiv ag^m \equiv g^m \bmod 6p$だったので、

$$k_0 p = r_0 + r_m = 1 + r_m \equiv 1 + g^m \bmod 6p$$

$7^m \equiv 1 \bmod 6$より、

$$1 + g^m \equiv 2 \bmod 6$$

よって、

$$k_0 p \equiv 2 \bmod 6$$

$k_0 = 2, 4$であった。

$k_0 = 4 \equiv -2 \bmod 6$より$p \equiv -1 \bmod 6$となり、このとき

$$Z = \frac{7^m - 1}{6} k_0 = \langle 44 \cdots 4 \rangle_7$$

$k_0 = 2 \equiv 2 \bmod 6$より$p \equiv 1 \bmod 6$となり、このとき

$$Z = \frac{7^m - 1}{6} k_0 = \langle 22 \cdots 2 \rangle_7$$

5. 付録

mを半周期とすると、$g^m \equiv -1 \bmod p$より$g^m + 1 = kp$と書き表せるので、$g^m + 1$は素因数pを持つ。

つまり、

周期（循環節の長さ）について

g進数展開のとき、mを半周期とする分数の分母の素因数pは、$g^m + 1$の約数になる。

例）$m=3, g=10$の場合

$$10^3+1=1001=[7,11,13]$$

となるので、$\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{13}$の半周期は3、周期は6だとわかる。

ただし、$\dfrac{1}{11}$の半周期は1、周期は2。

例）$m=5, g=7$の場合

$$7^5+1=16808=[2,2,2,11,191]$$

となるので、$\dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{191}$の半周期は5、周期は10だとわかる。

ただし、$\dfrac{1}{2}$の周期は1。

6. まとめ

今回の研究で、わかったことは以下の 2 つである。

$\dfrac{1}{6p}$ の 7 進展開について

●2 分割和

・ $p \equiv 5 \bmod 6$ のとき

循環節の長さが偶数ならば 2 分割和は $[4, 4, \cdots, 4, 4]$

・ $p \equiv 1 \bmod 6$ のとき

循環節の長さが偶数ならば 2 分割和は $[2, 2 \cdots, 2, 2]$

●周期

g 進数展開のとき、m を半周期とする分数の分母の素因数 p は、$g^m + 1$ の約数になる。

7. 今後の課題

「pがどんな値のときに2や4が並ぶか」はわかりましたが、2や4が並ぶ個数に関する規則性は発見できていません。

プログラム$mm-list$を使い、pが5000のときまで調べ、「循環節の中に並ぶ2や4の個数とpとの関係性」を見つけることが今後の課題です。