『ベルトラン予想の証明』について

宇都宮 潔

2024年12月24日

以下に，2文献を参考に記す。最初に，

文献[1]小島寛之，『素数ほどステキな数はない』，技術評論社，2021

から: ラマヌジャンは関数 $\theta(\mathrm{x})$, $\phi(\mathrm{x})$を使い，

(a) $$\theta(\mathrm{x})=\sum_{\mathrm{p}\leqq \mathrm{x}} \log \mathrm{p},\quad \phi(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{p}^{\mathrm{k}}\leqq \mathrm{x}} \log \mathrm{p}.$$

ベルトラン予想を証明した。

ベルトラン予想: 任意の自然数nに対して，nより大きく2n以下の素数が必ず存在する。

(b) $$\frac{\log 2}{3}\mathrm{x}-(4\log 2)\sqrt{\mathrm{x}}+O\left((\log \mathrm{x})^2\right) \leqq \theta(\mathrm{x})-\theta\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)$$

文献[1]の第2項目の誤植を訂正した。同書は上記ベルトラン予想に対して，ラマヌジャンによる弱いベルトラン予想の証明を解説している。

弱いベルトラン予想: 十分大きい自然数nに対して，nより大きく2n以下の素数が必ず存在する。

(b)の左辺が正の符号をもてば，$0<\theta(\mathrm{x})-\theta\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)$ から，x=2nとして，

$\theta(\mathrm{n})<\theta(2\mathrm{n})$ から，ベルトラン予想が成り立つ。このような整数xの満たす条件とその範囲については，文献[1]では触れていないが，ここでは最後に扱う。

文献[1]による

Step 1：関数$\boldsymbol{T}(\mathrm{x})=\log1+\log2+\log3+\cdots+\log[\mathrm{x}]$
Step 2：関数$\boldsymbol{T}(\mathrm{x})$と$\phi(\mathrm{x})$を関連付ける.
Step 3：関数$\boldsymbol{T}(\mathrm{x})$を積分を使って近似する.
Step 4: $\phi\left(\frac{\mathrm{x}}{1}\right)-\phi\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)$と$\phi\left(\frac{\mathrm{x}}{1}\right)-\phi\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)+\phi\left(\frac{\mathrm{x}}{3}\right)$を評価する.
Step 5: $\theta(\mathrm{x})-\theta\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)$について上記の不等式を評価する.

Step 1: Step 1：関数$\boldsymbol{T}(\mathrm{x})=\log1+\log2+\log3+\cdots+\log[\mathrm{x}]$

$$=\log(1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot[\mathrm{x}]) = \log([\mathrm{x}]!)$$

$\mathrm{n}!=2^{\mathrm{a}_1}\cdot3^{\mathrm{a}_2}\cdot5^{\mathrm{a}_3}\cdots\mathrm{p}^{\mathrm{a}_\mathrm{m}}$の素因数分解の各指数$\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_3,\cdots,\mathrm{a}_\mathrm{m}$は，

$$\mathrm{a}_1=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{n}!}{2^{\mathrm{k}}}\right],\mathrm{a}_2=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{n}!}{3^{\mathrm{k}}}\right],\mathrm{a}_3=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{n}!}{5^{\mathrm{k}}}\right],\cdots,\mathrm{a}_\mathrm{m}=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{p}^{\mathrm{k}}}\right]$$

で与えられるから,

$$\log p^{a_n}=a_n\log p=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{p^k}\right]\log p \quad \text{より},$$

したがって, 関数$\boldsymbol{T}$(x)=log n!=log([x]!)= $\displaystyle\sum_{p:\text{素数}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{p^k}\right]\log p.$

(1) $$\boldsymbol{T}(x)=\sum_{p:\text{素数}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{p^k}\right]\log p.$$

ここで, n!の素因数分解pの指数は次式で与えられる.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n!}{p^k}\right]=\left[\frac{n!}{p}\right]+\left[\frac{n!}{p^2}\right]+\left[\frac{n!}{p^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n!}{p^k}\right]+\cdots$$

Step 2:関数$\boldsymbol{T}$(x)とϕ(x)との関連: 次式(2)が成り立つ。

(2) $$\boldsymbol{T}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\frac{x}{k}\right)=\phi\left(\frac{x}{1}\right)+\phi\left(\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{x}{3}\right)+\cdots+\phi\left(\frac{x}{k}\right)+\cdots.$$

(1)で, pはすべての素数を渡り,

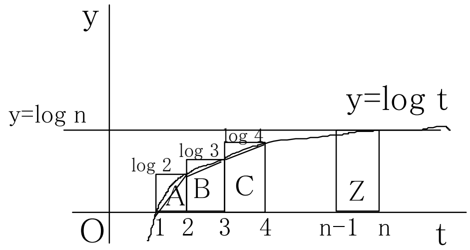
$$\phi\left(\frac{x}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{p^k}\right]\log p=\left(\left[\frac{x}{p}\right]+\left[\frac{x}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{p^k}\right]+\cdots\right)\log p$$

であるから, 素因数分解の原理から, (2)が成り立つ。

Step 3:関数$\boldsymbol{T}$(x)を積分を使って近似する:

(3) $$\boldsymbol{T}(x)=x\log x-x+O(\log x)$$

[証明] $\boldsymbol{T}(x):=\log1+\log2+\log3+\cdots+\log[x]=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log[x]$



y=log t (1≦t≦x)を積分すれば,

(3.1) $$S_1=\int_1^x \log t\,dt=\left[t\log t-t\right]_1^x=x\log x-x+1$$

これは, y=log t, t軸, 2直線t=1, t=nが囲む部分の図形の面積である。

また, 長方形A,B,C,…,Zの面積の和は,

$$S_2=\log 2+\log 3+\log 4+\cdots+\log n$$

最後に, 曲線y=log t(k−1≦t≦k; k=2,3,…,n)と3直線y=log k, t=k−1, t=kが囲む小さい三角形の面積の和は,

$$S_3=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\{\log k-\log(k-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}[(\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)+\cdots$$

$$+\{\log(n-1)-\log(n-2)\}+\{\log n-\log(n-1)\}]=\frac{1}{2}\log n$$

となり，曲線$y=\log t$からはみ出した部分は$\frac{1}{2}\log n$程度と見積もることができる。
また，$1+O(\log x)=O(\log x)$であるから，(4.1)の最終項1は無視できる。
したがって，(3)式が成り立つ。「スターリングの公式」を使い詳しい証明を
得ることが出来る

Step 4：$\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right)$と$\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{x}{3}\right)$を評価する.

(3) $$T(x)=x\log x-x+O(\log x)$$

で，$x\to x/2$とし得られた式を2倍する。

$$O\left(\log\frac{x}{2}\right)=O(\log x-\log 2)=O(\log x),\ 2\,O(\log x)=O(\log x),$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}\log\frac{x}{2}-\frac{x}{2}+O(\log x)$$

(3.1) $$2T\left(\frac{x}{2}\right)=x(\log x-\log 2)-x+O(\log x)$$

(3)-(3.2)から，(3.3)が得られる.

(3.3) $$T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)=(\log 2)x+O(\log x)$$

一方，(2)式の$T(x)$についても同様に$x\to x/2$とし2倍し差をとると，

$$T\left(\frac{x}{2}\right)=\phi\left(\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{x}{4}\right)+\phi\left(\frac{x}{6}\right)+\cdots+\phi\left(\frac{x}{2k}\right)+\cdots,$$

(3.4) $$T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)=\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right)+\phi\left(\frac{x}{3}\right)-\phi\left(\frac{x}{4}\right)+\cdots+(-1)^{k-1}\phi\left(\frac{x}{k}\right)+\cdots$$

であるが，

$$\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right)\geqq 0,\ \phi\left(\frac{x}{3}\right)-\phi\left(\frac{x}{4}\right)\geqq 0,\cdots$$

から，

(4.1) $$T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)\geqq\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right)$$

(4.1)の左辺に(3.3)の結果を用いれば，(4.2)を得る.

(4.2) $$(\log 2)x+O(\log x)\geqq\phi\left(\frac{x}{1}\right)-\phi\left(\frac{x}{2}\right).$$

(4.2)でも，$x\to x/2$，$x/2\to x/4,\cdots$と続けると，

$$(\log 2)\frac{x}{2}+O\left(\log\frac{x}{2}\right)\geqq\phi\left(\frac{x}{2}\right)-\phi\left(\frac{x}{4}\right),\ (\log 2)\frac{x}{4}+O\left(\log\frac{x}{4}\right)\geqq\phi\left(\frac{x}{4}\right)-\phi\left(\frac{x}{8}\right),\cdots$$

得られた各式を合計して次式を得る.

$$(\log 2)\left(x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\cdots\right)+O\left(\log x+\log\frac{x}{2}+\log\frac{x}{4}+\cdots\right)\geqq\phi(x).$$

$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\cdots=2x$ であるが， $\log x+\log\frac{x}{2}+\log\frac{x}{4}+\cdots$では，$\frac{x}{2^k}<1$のときは，$T\left(\frac{x}{2^k}\right)=0$

であるために，$\frac{x}{2^k}\geqq 1$となるkのみを考慮すれば良いから，$k\leqq\frac{\log x}{\log 2}$である．

このとき，$O\left(\log x+\log\frac{x}{2}+\log\frac{x}{4}+\cdots\right)=O\left((\log x)\times\frac{\log x}{\log 2}\right)=O\left((\log x)^2\right)$から，

(4.3) $\quad \psi(x)\leqq(2\log 2)x+O\left((\log x)^2\right).$

(3.4)を次のように変形するとき，$\psi\left(\frac{x}{4}\right)-\psi\left(\frac{x}{5}\right)>0$，$\psi\left(\frac{x}{6}\right)-\psi\left(\frac{x}{7}\right)>0,\cdots$より，

$$T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)=\psi\left(\frac{x}{1}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)-\left\{\psi\left(\frac{x}{4}\right)-\psi\left(\frac{x}{5}\right)\right\}-\left\{\psi\left(\frac{x}{6}\right)-\psi\left(\frac{x}{7}\right)\right\}\cdots-\cdots$$

(4.4) $\quad T(x)-2T\left(\frac{x}{2}\right)<\psi\left(\frac{x}{1}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)$

(4.4)の左辺を(3.3)で置き換えて，

(4.5) $\quad (\log 2)x+O(\log x)<\psi\left(\frac{x}{1}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)$

$\psi\left(\frac{x}{3}\right)$を左辺に移行しておき，

$(\log 2)x-\psi\left(\frac{x}{3}\right)+O(\log x)<\psi\left(\frac{x}{1}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right).$

(4.3)で，$x\to x/3$とするとき，$O\left(\left(\log\frac{x}{3}\right)^2\right)=O\left((\log x)^2\right)$

$\psi\left(\frac{x}{3}\right)\leqq\frac{2\log 2}{3}x+O\left((\log x)^2\right).$

各項を互いに反対側に移行して，

(4.6) $\quad -\frac{2\log 2}{3}x-O\left((\log x)^2\right)\leqq-\psi\left(\frac{x}{3}\right)$

(4.5)+(4.6)とし，$-O\left((\log x)^2\right)+O(\log x)=O\left((\log x)^2\right)$から，(4.7)式を得る．

(4.7) $\quad \frac{\log 2}{3}x+O\left((\log x)^2\right)<\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right).$

Step 5：$\theta(x)-\theta\left(\frac{x}{2}\right)$について上記の不等式を評価する．

定義式(a)で，$\psi(x)=\sum_{p^k\leqq x}\log p=\sum_{p\leqq x^{1/k}}\log p\ (k=1,2,3,\cdots)$であるから，

(5.1) $\quad \psi(x)=\theta(x)+\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/3})+\cdots,\ \theta(x)\leqq\psi(x).$

log pを加算する分だけ，$\theta(x)$よりも$\psi(x)$の方が大きい．

(5.1)で，$x\to x^{1/2}$として，

$\psi\left(x^{1/2}\right)=\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/4})+\theta(x^{1/6})+\cdots,$

2式の差から，

$$\begin{aligned}\psi(x)-2\psi\left(x^{1/2}\right)&=\theta(x)-\theta(x^{1/2})+\theta(x^{1/3})-\theta(x^{1/4})+\theta(x^{1/5})-\theta(x^{1/6})+\cdots\\&=\theta(x)-\left\{\theta(x^{1/2})-\theta(x^{1/3})\right\}-\left\{\theta(x^{1/4})-\theta(x^{1/5})\right\}-\cdots\\&\leqq\theta(x)\end{aligned}$$

$\theta(x) < \phi(x)$であるから, (5.2)が導かれる。

(5.2) $\phi(x)-2\phi\left(\sqrt{x}\right) \leqq \theta(x) \leqq \phi(x).$

$\therefore \quad \phi(x) \leqq \theta(x)+2\phi\left(\sqrt{x}\right)$

これを(4.7)の右辺に代入して,

(4.7)再掲 $\dfrac{\log 2}{3}x+O\left((\log x)^2\right) < \phi(x)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(5.3) $\phi(x)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqq \theta(x)+2\phi\left(\sqrt{x}\right)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right).$

$-\phi(x) \leqq -\theta(x),\ -\phi\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqq -\theta\left(\dfrac{x}{2}\right)$であるから,

$\phi(x)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqq \theta(x)+2\phi\left(\sqrt{x}\right)-\theta\left(\dfrac{x}{2}\right).$

したがって,

(5.4) $\phi(x)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right)-2\phi\left(\sqrt{x}\right) \leqq \theta(x)-\theta\left(\dfrac{x}{2}\right).$

(4.3)で, $x \rightarrow \sqrt{x}$とし更に2倍, 移行して(5.5)が導かれる.

(4.3)再掲 $\phi(x) \leqq (2\log 2)x+O\left((\log x)^2\right).$

$\phi\left(\sqrt{x}\right) \leqq (2\log 2)\sqrt{x}+O\left((\log\sqrt{x})^2\right).$

(5.5) $-(4\log 2)\sqrt{x}+O\left((\log x)^2\right) \leqq -2\phi\left(\sqrt{x}\right)$

すると, (4.7)から,

(4.7)再掲 $\dfrac{\log 2}{3}x+O\left((\log x)^2\right) < \phi(x)-\phi\left(\dfrac{x}{2}\right)$

であったから, (4.7)と(5.5)の辺々を加えれば,式(5.4)によって,

(5.6)式が導かれる。

(5.6) $\dfrac{\log 2}{3}x-(4\log 2)\sqrt{x}+O\left((\log x)^2\right) \leqq \theta(x)-\theta\left(\dfrac{x}{2}\right).$ □

十分大きいnの評価by K.U.

$\log x < \sqrt{x}$ だから, $(\log x)^2 < x \Rightarrow O\left((\log x)^2\right) = -c(\log x)^2\ (a>c>0)$を仮定.

但し,a=(log 2)/3, b=−4log 2で, b=−12a. $t=\sqrt{x}$とおくとき,

$O\left((\log x)^2\right) = -c(\log x)^2 > -cx = -ct^2$であるから,

(5.6)の左辺$=at^2+bt-ct^2>(a-c)t^2-12at$

仮定より, a>c だから, $y=(a-c)t^2-12at$は下に凸の放物線である。

判別式 $D=144a^2-4a+4c=\left(12a-\dfrac{1}{6}\right)^2+4c-\dfrac{1}{36}$

これは,c>1/144のとき, D>0.

また, (5.6)の左辺>$(a-c)t\left(t-\dfrac{12a}{a-c}\right)=(a-c)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\dfrac{12a}{a-c}\right)$…… (#)

$a=\dfrac{\ln 2}{3}=0.231\cdots$, $b=-12a=-4\ln 2=-2.772\cdots$.

$\sqrt{x}>\dfrac{12a}{a-c}$を満たすほど, xが十分大きいとき, すなわち,

(6) $$x>\left(\frac{12a}{a-c}\right)^2$$

ならば, (#)>0だから, (5.6)の左辺＞0であり, ベルトラン予想

$\theta(2n)>p>\theta(n)$を満たす素数pが存在する, ことが保証される。

$$F(c)=\left\{\frac{4\log 2}{(\ln 2)/3-c}\right\}^2$$

F(0.05)= 44.2330593214399　F(0.1)= 84.4251237339503
F(0.125)= 128.921657099566　F(0.15)= 220.720952046741
F(0.175)= 461.53310489034　F(0.2)= 1503.98189747432
F(0.225)= 39624.4927839384　F(0.23)= 1317463.87871509
F(0.231)= 602394690.121957

文献[2]　ナルキエヴィッチ,素数定理の進展・上のP149.

(1) $$\theta(x):=\sum_{p\leqq x}\log p,\quad \psi(x):=\sum_{p^k\leqq x}\log p.$$

であるから, 上の原稿でも示した通り, Ramanujyanの$\boldsymbol{T}(x):=\log([x]!)$に対して、

(2) $$\boldsymbol{T}(x)=\sum_{n\leqq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n,m\geqq 1}^{\infty}\theta\left(\left(\frac{x}{n}\right)^{1/m}\right)$$

である([2]P134).(2)から, (3)が,また(1)から(4)が直ちにしたがう.

(3) $$\log([x]!)-2\log([x/2]!)=\psi(x)-\psi(x/2)+\psi(x/3)-\psi(x/4)+\cdots$$

(4) $$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x})=\theta(x)-\psi(\sqrt{x})+\psi(\sqrt[3]{x})-\psi(\sqrt[4]{x})+\cdots$$

ここで, $\theta(x)$, $\psi(x)$はともに単調増加であるから,(1)から(5.1)が,

また(3)から(5.2)が導かれる。

(5.1) $$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x})\leqq\theta(x)\leqq\psi(x).$$

(5.2) $$\psi(x)-\psi(x/2)\leqq\log([x]!)-2\log([x/2]!)\leqq\psi(x)-\psi(x/2)+\psi(x/3).$$

ここで, スターリングの公式から, (6)が成り立つことを利用する.

(6) $$\frac{2}{3}x<\log([x]!)-2\log([x/2]!)<\frac{3}{4}x.$$

［解説・検証］ここで使うスターリングの公式は以下の形:

$$\log(n!)\sim n\log n-n+\frac{1}{2}\log(2\pi n)$$

$S(n)=n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$

(参考)

$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ は単調増加.

$\int_1^n \log x dx=n\log n-n+1$, $\log(2\pi n)$ も単調増加.

(7)の左側不等号の成立を確かめ:	(7)の右側不等号の成立を確かめ:
$S(300)-2S(150)-\frac{2}{3}*300=$ 4.86647157801073	$\frac{3}{4}*4-\{S(4)-2S(2)\}=$ 1.14634981096489
$S(306)-2S(153)-\frac{2}{3}*306=$ 5.01545334772228	$\frac{3}{4}*10-\{S(10)-2S(5)\}=$ 1.94561209354229
$S(324)-2S(162)-\frac{2}{3}*324=$ 5.46352339088142	$\frac{3}{4}*100-\{S(100)-2S(50)\}=$ 8.2136583896442
	$\frac{3}{4}*300-\{S(300)-2S(150)\}=$ 20.1335284219893

(6)の左側の不等号は x>300に対して, 右側の不等号は x>0に対して, 成り立つ. したがって, (5.2)から x>0に対して, (7.1)が, x>300に対して, (7.2)が成り立つ.

(7.1) $$\psi(x)-\psi(x/2)<\frac{3}{4}x,$$

(7.2) $$\frac{2}{3}x<\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right).$$

いま, (7.1)で, x→x/2, x/2→x/4, x/4→x/8…と次々に半分を代入し,全式を足すとき, $\lim_{n\to\infty}\psi\left(x/2^n\right)=0$, $\sum_{k=0}^{\infty}x/2^k=2x$ から(8)を得る.

(8) $$x>0に対して, \psi(x)<\frac{3}{2}x.$$

(5.1)から, $\psi(x)\leqq\theta(x)+2\psi(\sqrt{x})$であるから, 両辺に$-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)$を加えると, $-\psi\left(\frac{x}{2}\right)<-\theta\left(\frac{x}{2}\right)$と(8)から, 次式を得る.

$$\begin{aligned}\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)&\leqq\theta(x)+2\psi(\sqrt{x})-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right).\\&<\theta(x)+2\psi(\sqrt{x})-\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)\\&=\theta(x)-\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}+3\sqrt{x}\end{aligned}$$

(7.2)の結果と合せて, $\frac{2}{3}x < \theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} + 3\sqrt{x}$ であるから,

$$x > 300 \text{のとき}, \ \frac{x}{6} - 3\sqrt{x} < \theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right).$$

$x \geqq 18^2 = 324$に対して, $\frac{x}{6} \geqq 3\sqrt{x}$であるから, $x \geqq 162$に対して,

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0$$

を得る.すなわち, $x \geqq 162$に対して, xと2xの間に素数が存在することが示された. 付け加えて, $x < 162$の場合は, 容易に調べられるために, ベルトラン予想が成り立つ, とナルキエヴィッチは記している. □