シャフリングの数理

市川 文

平成 23 年 2 月 1 日

目 次

1 目的

与えられたカードに対して、それらを 2 つの山に分けて交互に入れることによって並べ返す。これをシャフリングという。カードの枚数を m とする時、各々のカードを $m-1$ 以下の数字に対応させせる。これによって m までの自然数全体の集合を Σ とする時、シャフリングは、Σ から Σ への全単射を与える。全単射全体は m 次の対称群 S_m になるので、シャフリングは 1 つの対照群としての置換となる。置換群及び法 m または法 $(m+1)$ としたときの合同数の理論を用いシャフリングの研究をする。S_m の元としてのシャフリングを σ で表すとき、$\sigma^r = e$ となる。最小の正の整数 r を求める。r 回シャフリングをすると、トランプは元に戻る r をシャフリングの周期という。周期がいくつになるか、周期、半周期等の研究を行う。

2 方法

リストにカードの並びを当てはめて、Prolog を用いてプログラムを作り、それを実行してシャフリングを仮想的に実現する。以下、詳しく説明しよう。

2.1　偶数枚の場合

最初に、偶数枚の時のシャフリングを考える。
具体的に、８枚のカードの場合を説明すると
①カードに順に番号をつけて与える
[1,2,3,4,5,6,7,8]
②４枚ずつの組に分ける
[1,2,3,4] [5,6,7,8]
③右の組から１枚、左の組から１枚、右の組から１枚…と、交互にカードを並べ替えていく
[5,1,6,2,7,3,8,4]
となる。これを、Prolog 関数を使ってリストの変化として実現するプログラムを作る。
枚数 $N = 2n$ の場合
使用した関数

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):- append0(Z=X+Y).

left(A=[]+A,0):- !.
left(A=B+C,N):- N>0, N1 is N-1,!,
    left(A=B1+[X|C],N1),append0(B=B1+[X]),!.

sh([A]=[]+[A]).
sh([]=[]+[]).
sh(D=[X|C]+[Y|B]):-
    sh(D0=C+B),D=[X,Y|D0].

unit(1,[1]).
unit(N,L):- N>1, N1 is N-1,
    unit(N1,L1), append0(L=L1+[N]).

shuffle(L,A,B,M):-
       length(L,N),N1 is N/2,left(L=A+B,N1),sh(M=B+A).

r_shuffle(L0,M,N,N).
r_shuffle(L0,L,C,N):-
    shuffle(L,_,_,L1),write(C=L1),nl,
    L0 \== L1 ->(C1 is C+1,r_shuffle(L0,L1,C1,N));true.

ebizo(NN):-unit(NN,L),r_shuffle(L,L,1,100000).
```

まず， `shuffle(L,A,B,M)` によって，簡易的なシャッフルを実行する.
L…カードの並び (リストによって表わす)

A…カードを２つの組に分けた際の上半分
B…カードを２つの組に分けた際の下半分
M…シャッフルした結果の並び順
実行例

```
?- shuffle([1,2,3,4],A,B,M).
A = [1, 2],
B = [3, 4],
M = [3, 1, 4, 2] .
```

ただし，この関数だと１回のシャッフルしか考えることが出来ない．
そこで，指定した回数シャッフルを行うことが出来る er_shuffle(L0,L,C,N) を使う．
C…1
N…シャッフルさせたい回数
実行例

```
?- r_shuffle(L0,[1,2,3,4],1,10).
1=[3, 1, 4, 2]
2=[4, 3, 2, 1]
3=[2, 4, 1, 3]
4=[1, 2, 3, 4]
5=[3, 1, 4, 2]
6=[4, 3, 2, 1]
7=[2, 4, 1, 3]
8=[1, 2, 3, 4]
9=[3, 1, 4, 2]
true
```

また，unit(N,L) と組み合わせることによって、枚数の多いときの際に入力が楽になる。
N…カードの枚数

```
?- unit(10,L),r_shuffle(L0,L,1,11).
1=[6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5]
2=[3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8]
3=[7, 3, 10, 6, 2, 9, 5, 1, 8, 4]
4=[9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2]
5=[10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
6=[5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6]
7=[8, 5, 2, 10, 7, 4, 1, 9, 6, 3]
8=[4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7]
```

```
9=[2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9]
10=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
L = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

これでいろいろな枚数のシャッフルが確認しやすくなったが、周期だけが気になるときは、[1,2,3,4 …] となっているところを探さねばならず、面倒である。

そこで、 ebizo(NN) の関数で [1,2,3,4…] となった時点で止まるようにした。

NN…カードの枚数

実行例

```
 ?- ebizo(10).
1=[6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5]
2=[3, 6, 9, 1, 4, 7, 10, 2, 5, 8]
3=[7, 3, 10, 6, 2, 9, 5, 1, 8, 4]
4=[9, 7, 5, 3, 1, 10, 8, 6, 4, 2]
5=[10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
6=[5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6]
7=[8, 5, 2, 10, 7, 4, 1, 9, 6, 3]
8=[4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7]
9=[2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9]
10=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
true .

 ?- ebizo(20).
1=[11, 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10]
2=[16, 11, 6, 1, 17, 12, 7, 2, 18, 13, 8, 3, 19, 14, 9, 4, 20, 15, 10, 5]
3=[8, 16, 3, 11, 19, 6, 14, 1, 9, 17, 4, 12, 20, 7, 15, 2, 10, 18, 5, 13]
4=[4, 8, 12, 16, 20, 3, 7, 11, 15, 19, 2, 6, 10, 14, 18, 1, 5, 9, 13, 17]
5=[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19]
6=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
true .

 ?- ebizo(30).
1=[16, 1, 17, 2, 18, 3, 19, 4, 20, 5, 21, 6, 22, 7, 23, 8, 24, 9, 25, 10, 26, 11, 27, 12, 28, 13,
2=[8, 16, 24, 1, 9, 17, 25, 2, 10, 18, 26, 3, 11, 19, 27, 4, 12, 20, 28, 5, 13, 21, 29, 6, 14, 22
3=[4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 3, 7, 11,
4=[2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,
5=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
true .
```

これで、無駄なく 1 周分だけのシャッフルを表わすことが出来た。

また、以下の関数で一気に周期を求めることが出来る。

```
factor(P/2):- Q is P//2,P  =:= 2*Q,!.
factor(P/I):- P1 is floor(sqrt(P)),
    for(1 =< P1,J),
    J1 is 2*J+1,
    Q is P//J1,
    P =:= J1*Q,I= J1,!.
factor(P/P1) :- P=P1,!.

euler(N,F):- factor(N/P),(
             P==N -> F is P-1;
             M is N//P,euler(M,F1),
             (M mod P =:=0 ->(F is P*F1); F is (P-1)*F1)
             ).

per0(X,Y,M,N,W):- Y is 2*X mod M, N1 is N+1,
    (Y \==1 -> per0(Y,Z,M,N1,W); W=N1).

per(2,R,M):-
    per0(2,Y,M,1,R).

keshi(B,E):-for(B=<E,N),euler(N,A),write(A),nl,fail.
keshi(B,E).

syuki(B,E):-for(B=<E,N),N1 is 2*N+1,per(2,R,N1),write(R),nl,fail.
syuki(B,E).
```

実際に周期を求めるために使う関数は `syuki(B,E)` だけで、B、E には知りたい範囲の枚数÷2 の値を入力する。例えば `syuki(2,50)` として実行すると、カード 4 枚の周期からカード 100 枚までの周期が一挙に得られる。(但し、奇数枚の周期は表示されない)

実行例

```
?- syuki(2,50).
4
3
6
10
12
4
8
18
6
11
```

```
20
18
28
5
10
12
36
12
20
14
12
23
21
8
52
20
18
58
60
6
12
66
22
35
9
20
30
39
54
82
8
28
11
12
10
36
48
30
100
true.
```

これによって 1 回 1 回枚数を入力する手間が省け、大幅に時間が短縮できた。

2.2 奇数枚の場合

次に、奇数枚の時のシャフリングを考える。

①カードを並べる

[1,2,3,4,5,6,7]

② 2 つの組に分ける (この際、左の組が 1 枚多くなるように分ける)

[1,2,3,4] [5,6,7]

③右の組から 1 枚、左の組から 1 枚、右の組から 1 枚…と、交互にカードを並べ替えていく

[5,1,6,2,7,3,4]

枚数 $N = 2n + 1$ の場合

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):- append0(Z=X+Y).

left(A=[]+A,0):- !.
left(A=B+C,N):- N>0, N1 is N-1,!,
    left(A=B1+[X|C],N1),append0(B=B1+[X]),!.

sh([A]=[]+[A]).
sh([]=[]+[]).
sh(D=[X|C]+[Y|B]):-
    sh(D0=C+B),D=[X,Y|D0].

unit(1,[1]).
unit(N,L):- N>1, N1 is N-1,
    unit(N1,L1), append0(L=L1+[N]).

shuffle2(L,A,B,M):-
       length(L,N),N1 is (N+1)/2,left(L=A+B,N1),sh(M=B+A).

r_shuffle2(L0,M,N,N).
r_shuffle2(L0,L,C,N):-
    shuffle2(L,_,_,L1),write(C),nl,
    L0 \== L1 ->(C1 is C+1,r_shuffle2(L0,L1,C1,N));true.

ebizo2(NN):-unit(NN,L),r_shuffle2(L,L,1,100000).
```

仕組みはほぼ偶数枚のときと変わらないため、説明は割愛する。

ただし、偶数枚の関数のように一度に周期を求める関数が作れなかったので、一つ一つ ebizo2(NN) を使って求めていった。

3　結果

3.1　偶数枚の結果

表 1: 偶数枚

n	$2n$	$2n+1$	オイラー	周期
2	4	5	4	4
3	6	7	6	3
4	8	9	6	6
5	10	11	10	10
6	12	13	12	12
7	14	15	8	4
8	16	17	16	8
9	18	19	18	18
10	20	21	12	6
11	22	23	22	11
12	24	25	20	20
13	26	27	18	18
14	28	29	28	28
15	30	31	30	5
16	32	33	20	10
17	34	35	24	12
18	36	37	36	36
19	38	39	24	12
20	40	41	40	20
21	42	43	42	14
22	44	45	24	12
23	46	47	46	23
24	48	49	42	21
25	50	51	32	8
26	52	53	52	52
27	54	55	40	20
28	56	57	36	18
29	58	59	58	58
30	60	61	60	60
31	62	63	36	6
32	64	65	48	12
33	66	67	66	66
34	68	69	44	22
35	70	71	70	35
36	72	73	72	9
37	74	75	40	20
38	76	77	60	30
39	78	79	78	39
40	80	81	54	54
41	82	83	82	82
42	84	85	64	8
43	86	87	56	28
44	88	89	88	11
45	90	91	72	12
46	92	93	60	10
47	94	95	72	36
48	96	97	96	48
49	98	99	60	30
50	100	101	100	100
51	102	103	102	51
52	104	105	48	12
53	106	107	106	106
54	108	109	108	36
55	110	111	72	36
56	112	113	112	28
57	114	115	88	44
58	116	117	72	12
59	118	119	96	24
60	120	121	110	110
61	122	123	80	20
62	124	125	100	100
63	126	127	126	7
64	128	129	84	14
65	130	131	130	130
66	132	133	108	18
67	134	135	72	36
68	136	137	136	68
69	138	139	138	138
70	140	141	92	46
71	142	143	120	60
72	144	145	112	28
73	146	147	84	42
74	148	149	148	148

n	$2n$	$2n+1$	オイラー	周期
75	150	151	150	15
76	152	153	96	24
77	154	155	120	20
78	156	157	156	52
79	158	159	104	52
80	160	161	132	33
81	162	163	162	162
82	164	165	80	20
83	166	167	166	83
84	168	169	156	156
85	170	171	108	18
86	172	173	172	172
87	174	175	120	60
88	176	177	116	58
89	178	179	178	178
90	180	181	180	180
91	182	183	120	60
92	184	185	144	36
93	186	187	160	40
94	188	189	108	18
95	190	191	190	95
96	192	193	192	96
97	194	195	96	12
98	196	197	196	196
99	198	199	198	99
100	200	201	132	66
101	202	203	168	84
102	204	205	160	20
103	206	207	132	66
104	208	209	180	90
105	210	211	210	210
106	212	213	140	70
107	214	215	168	28
108	216	217	180	15
109	218	219	144	18
110	220	221	192	24
111	222	223	222	37
112	224	225	120	60

n	$2n$	$2n+1$	オイラー	周期
113	226	227	226	226
114	228	229	228	76
115	230	231	120	30
116	232	233	232	29
117	234	235	184	92
118	236	237	156	78
119	238	239	238	119
120	240	241	240	24
121	242	243	162	162
122	244	245	168	84
123	246	247	216	36
124	248	249	164	82
125	250	251	250	50
126	252	253	220	110
127	254	255	128	8
128	256	257	256	16
129	258	259	216	36
130	260	261	168	84
131	262	263	262	131
132	264	265	208	52
133	266	267	176	22
134	268	269	268	268
135	270	271	270	135
136	272	273	144	12
137	274	275	200	20
138	276	277	276	92
139	278	279	180	30
140	280	281	280	70
141	282	283	282	94
142	284	285	144	36
143	286	287	240	60
144	288	289	272	136
145	290	291	192	48
146	292	293	292	292
147	294	295	232	116
148	296	297	180	90
149	298	299	264	132
150	300	301	252	42

n	$2n$	$2n+1$	オイラー	周期
151	302	303	200	100
152	304	305	240	60
153	306	307	306	102
154	308	309	204	102
155	310	311	310	155
156	312	313	312	156
157	314	315	144	12
158	316	317	316	316
159	318	319	280	140
160	320	321	212	106
161	322	323	288	72
162	324	325	240	60
163	326	327	216	36
164	328	329	276	69
165	330	331	330	30
166	332	333	216	36
167	334	335	264	132
168	336	337	336	21
169	338	339	224	28
170	340	341	300	10
171	342	343	294	147
172	344	345	176	44
173	346	347	346	346
174	348	349	348	348
175	350	351	216	36
176	352	353	352	88
177	354	355	280	140
178	356	357	192	24
179	358	359	358	179
180	360	361	342	342
181	362	363	220	110
182	364	365	288	36
183	366	367	366	183
184	368	369	240	60
185	370	371	312	156
186	372	373	372	372
187	374	375	200	100
188	376	377	336	84

n	$2n$	$2n+1$	オイラー	周期
189	378	379	378	378
190	380	381	252	14
191	382	383	382	191
192	384	385	240	60
193	386	387	252	42
194	388	389	388	388
195	390	391	352	88
196	392	393	260	130
197	394	395	312	156
198	396	397	396	44
199	398	399	216	18

3.2 奇数枚の結果

表 2: 奇数枚

n	$2n+1$	周期
1	3	3
2	5	6
3	7	10
4	9	9
5	11	11
6	13	12
7	15	56
8	17	17
9	19	30
10	21	110
11	23	76
12	25	102
13	27	27
14	29	20
15	31	90
16	33	132
17	35	35
18	37	132
19	39	380
20	41	182
21	43	132
22	45	506
23	47	420
24	49	56
25	51	51
26	53	380
27	55	306
28	57	57
29	59	59
30	61	30
31	63	132
32	65	65
33	67	462
34	69	1190
35	71	72
36	73	380
37	75	870
38	77	1482
39	79	954
40	81	81
41	83	56
42	85	756
43	87	110
44	89	132
45	91	90
46	93	1260
47	95	2256
48	97	870
49	99	99
50	101	2550
51	103	132
52	105	105
53	107	1260
54	109	1260
55	111	756
56	113	1892
57	115	132
58	117	552
59	119	1090
60	121	380
61	123	1980
62	125	42
63	127	182
64	129	129
65	131	306
66	133	1260
67	135	4556
68	137	137
69	139	2070
70	141	3540
71	143	756
72	145	1722
73	147	147
74	149	210

n	$2n+1$	周期
75	151	552
76	153	380
77	155	2652
78	157	2652
79	159	1056
80	161	161
81	163	380
82	165	6806
83	167	1860
84	169	306
85	171	171
86	173	3540
87	175	3306
88	177	177
89	179	179
90	181	3540
91	183	1260
92	185	1560
93	187	306
94	189	8930
95	191	9120
96	193	132
97	195	195
98	197	9702
99	199	4290
100	201	6972
101	203	380
102	205	4290
103	207	8010
104	209	209
105	211	4830
106	213	756
107	215	210
108	217	306
109	219	552
110	221	1332
111	223	3540
112	225	225

n	$2n+1$	周期
113	227	5700
114	229	870
115	231	812
116	233	8372
117	235	6006
118	237	14042
119	239	552
120	241	8694
121	243	6972
122	245	1260
123	247	6642
124	249	2450
125	251	11990
126	253	56
127	255	240
128	257	1260
129	259	6972
130	261	17030
131	263	2652
132	265	462
133	267	267
134	269	18090
135	271	132
136	273	380
137	275	8372
138	277	870
139	279	4830
140	281	8742
141	283	1260
142	285	3540
143	287	18360
144	289	2256
145	291	291
146	293	13340
147	295	8010
148	297	17292
149	299	1722
150	301	9900

n	$2n+1$	周期
151	303	3540
152	305	10302
250	501	62750

4　考察

表から見てみると、偶数枚の場合の周期はたかだか $2n$ 回である事に対し、奇数枚の場合は偶数枚の時と比べとても大きな回数となっていることが多い。偶数枚の場合と奇数枚の場合について、枚数と周期の関係性を考えてみる。

4.1　偶数枚の場合

10 枚で 2 つに分けるシャフリングを考える。
最初の並び方を x とし、1 回シャフリングした時の並び方を y とする。

表 3: 10 枚で 2 つに分けるシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
$2y$	12	2	14	4	16	6	18	8	20	10
$2y-x$	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0

となる。
このことから

$$\begin{aligned} 2y - x &\equiv 0 && \mod 11 \\ y &\equiv \frac{1}{2}x && \mod 11 \cdots (1) \end{aligned}$$

例えば、

$$\begin{aligned} 2 \times 6 = 12 &\equiv 1 && \mod 11 \\ 6 &\equiv \frac{1}{2} && \mod 11 \end{aligned}$$

(1) に代入して

$$y \equiv 6x \mod 11$$

これを用いて考えると、

表 4: x を 6 倍して mod 11 で考える

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$6x$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
$6x$ (mod11)	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

上図より、x をそれぞれ 6 倍して mod 11 で考えると 1 回シャフリングした y になる。
さらに、2 回 x をシャフリングしたものを z とすると、同様にして

$$z \equiv 6y \quad \mathrm{mod}\ 11$$

よって、$y \equiv 6x \quad \mathrm{mod}\ 11$ なので、

$$z \equiv 6 \times 6x = 6^2 x \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

これを繰り返し、m 回シャフリングをしたときに元に戻るとしたら、

$$6^m x \equiv x \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

$$6^m \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ 11 \cdots (*)$$

となる最小の整数 m が周期となる。
計算していくと、m=10 のときに元に戻るので、周期は 10 である。
また、$(*)$ の両辺に 2^m をかけると、

$$6^m \times 2^m \equiv 1 \times 2^m \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

$$(6 \times 2)^m \equiv 2^m \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

$$12^m \equiv 2^m \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

$12 \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ 11$ より、

$$1^m = 1 \equiv 2^m \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

よって $(*)$ は

$$6^m \equiv 1 \equiv 2^m \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

$$2^m \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ 11$$

と書き直せる。

一般の場合
枚数 $2n$ 枚のとき
下の式を満たす最小の正の整数 m が周期となる。

$$2^m \equiv 1 \mod 2n+1$$

従って、周期 m は $\varphi(2n+1)$ の約数が周期となる。

また, 結果から以下の特徴が見られた

- 周期は必ず枚数以下となる
- 周期と枚数が一致する時に、$2n+1$ が素数となる。

表 5: 参考：$2n+1$ が素数の時

n	2n	2n+1	オイラー	周期	n	2n	2n+1	オイラー	周期
2	4	5	4	4	51	102	103	102	51
3	6	7	6	3	53	106	107	106	106
5	10	11	10	10	54	108	109	108	36
6	12	13	12	12	56	112	113	112	28
8	16	17	16	8	63	126	127	126	7
9	18	19	18	18	65	130	131	130	130
11	22	23	22	11	68	136	137	136	68
14	28	29	28	28	69	138	139	138	138
15	30	31	30	5	74	148	149	148	148
18	36	37	36	36	75	150	151	150	15
20	40	41	40	20	78	156	157	156	52
21	42	43	42	14	81	162	163	162	162
23	46	47	46	23	83	166	167	166	83
26	52	53	52	52	86	172	173	172	172
29	58	59	58	58	89	178	179	178	178
30	60	61	60	60	90	180	181	180	180
33	66	67	66	66	95	190	191	190	95
35	70	71	70	35	96	192	193	192	96
36	72	73	72	9	98	196	197	196	196
39	78	79	78	39	99	198	199	198	99
41	82	83	82	82	105	210	211	210	210
48	96	97	96	48	111	222	223	222	37
50	100	101	100	100	113	226	227	226	226

周期と枚数の関係

$$2^m - 1 = k(2n+1)$$

これにより、周期からトランプの枚数を考えることができる。
① 周期 $m = 3$ のとき、周期と枚数の関係式に代入する。

$$2^3 - 1 = k(2n+1)$$

$$7 = k(2n+1)$$

7 は素数なので、$2n+1$ は 1 or 7 のどちらかであるが、$n \neq 0$(n は枚数) より、

$$2n+1 = 7$$

$$2n = 6$$

つまり周期が 3 のときの枚数は 6 枚である。

② m 回を周期に持つとすると、そのときのトランプの枚数 $(2n)$ は $((2^m-1)$ の約数$)-1$ である。
例)6 回でカードの組が元に戻るカードの枚数を考える。

$$2^6 - 1 = 63 = 3 \times 3 \times 7$$

であるので、その因数は

3 , 7 , 9 , 21 , 63

である。よって、6 回で元の組に戻るカードの枚数は、これらから 1 を引いた

2 枚 , 6 枚 , 8 枚 , 20 枚 , 62 枚

※これはあくまで 6 回のシャフリング後に元の組に戻るというだけであって,
周期が 6 回というわけではない。実際に、2 枚の周期は 2 回、6 枚の周期は 3 回である。

4.2 奇数枚の場合

9 枚で 2 つに分けるシャフリングを考える。
最初の並び方を x とし、1 回シャフリングした時の並び方を y とする。

表 6: 7 枚のシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	1	6	2	7	3	4
$2y$	10	2	12	4	14	6	8
$2y-x$	9	0	9	0	9	0	1

ここで偶数枚時と同じように考えようとすると、 $2y-x$ の最後の要素で不具合が生じてしまう。よって奇数枚の場合では、偶数枚の時のような整数論では考えることが出来ない。
そこで、リストの置換と考えサイクルに分けて考えてみる。すると，次のようなことがわかった。

周期と枚数の関係

枚数 $2n+1$ 枚のとき

$L_1, L_2, \cdots, L_r$ を共通文字のないサイクルとして各々の長さを $l_1, l_2, \cdots, l_r$ とした時、
$S = L_1 \cdot L_2 \cdots L_r$ の位数は,$Lcm(l_1, l_2, \cdots, l_r)$ となる。

例①:7 枚の場合

表 7: 7 枚のシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	1	6	2	7	3	4

$L_1 = (1, 5, 7, 4, 2) \quad L_2 = (3, 6), \quad l_1 = 5 \;\; l_2 = 2$ となり，
周期 $= Lcm(l_1, l_2) = Lcm(5, 2) = 10$ である。

例②:トランプ

- ジョーカー抜き (52 枚)　周期 $\cdots$ 52 回
- ジョーカー 2 枚 (54 枚)　周期 $\cdots$ 20 回
- ジョーカー 1 枚 (53 枚)　周期 $\cdots$ 380 回

53 枚の時，リストは
$L_1 = (1, 28, 14, 7, 31, 43, 49, 52, 26, 13, 34, 17, 36, 18, 9, 32, 16, 8, 4, 2)$
$L_2 = (3, 29, 42, 21, 38, 19, 37, 46, 23, 39, 47, 51, 53, 27, 41, 48, 24, 12, 6)$
$L_3 = (5, 30, 15, 35, 45, 50, 25, 40, 10)$
$L_4 = (11, 33, 44, 22)$
よって，$l_1 = 20, l_2 = 19, l_3 = 10, l_4 = 4$ となり，

周期 $= Lcm(l_1, l_2, l_3, l_4) = Lcm(20, 19, 10, 4) = 380$

である。

5 感想