シャフリングの数理

学習院大学理学部数学科

市川　丈

目的

シャフリングを置換群の立場で理解する。

・偶数枚の場合は、数の合同理論から考える

・奇数枚の場合は、サイクルに分けて考える

それぞれについて、周期と枚数との関係性について研究した。

偶数枚のシャフリングの仕方

☆枚数8枚で考える

1 2 3 4 5 6 7 8

◎半分で分ける。

1 2 3 4　　5 6 7 8

◎交互に１枚づつ順に並べていく。

5 1 6 2 7 3 8 4

奇数枚のシャフリングの仕方

☆枚数7枚で考える

1 2 3 4 5 6 7

◎左4枚、右3枚で分ける。

1 2 3 4　　5 6 7

◎交互に１枚づつ順に並べていく。

5 1 6 2 7 3 4

偶数枚の場合

枚数$2n$枚のとき、

$$2^m \equiv 1 \mod 2n+1$$

これを満たす最小の正の整数 m が周期となる。

これより、周期mは $\varphi(2n+1)$ の約数となる。

さらに,以下の２つの特徴が見られた。

- 周期は必ず枚数以下となる
- 周期と枚数が一致するには、$2n+1$が素数となることが必要条件である

※Excel参照

奇数枚の場合

奇数枚の場合、偶数枚の時のように合同論で考えることができない。

6枚と7枚の時を例に見てみよう。最初の並び方をxとし、1回シャフリングした時の並び方をyとする。

Table 1. 6枚のシャフリング

x	1	2	3	4	5	6
y	4	1	5	2	6	3
$2y$	8	2	10	4	12	6
$2y-x$	7	0	7	0	7	0

このことから、6枚の時は

$$2y - x \equiv 0 \mod 7$$

となり、偶数枚は合同論で考えていくことが出来た。

同じように、7枚の時を考えてみる。

Table 2. 7枚のシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	1	6	2	7	3	4
$2y$	10	2	12	4	14	6	8
$2y-x$	9	0	9	0	9	0	1

表からわかるように、$2y-x$ の最後の要素で不具合が生じてしまう。

そこで今度は、リストの置換と考えサイクルに分けて考えてみると、次のようなことがわかった

$L_1, L_2, \cdots, L_r$ を共通文字のないサイクルとして各々の長さを $l_1, l_2, \cdots, l_r$ とした時、$S = L_1 \cdot L_2 \cdots L_r$ の位数は $Lcm(l_1, l_2, \cdots, l_r)$ となる。

例①:7枚の場合

TABLE 3. 7枚のシャフリング

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	1	6	2	7	3	4

$L_1 = (1, 5, 7, 4, 2) \quad L_2 = (3, 6), \quad l_1 = 5 \;\; l_2 = 2$ となり,

$$\text{周期} = Lcm(l_1, l_2) = Lcm(5, 2) = 10$$

である。

例②:トランプ

- ジョーカー抜き(52枚)　周期$\cdots$52回
- ジョーカー2枚(54枚)　周期$\cdots$20回
- ジョーカー1枚(53枚)　周期$\cdots$380回

53枚の時，リストは

$L_1 = (1, 28, 14, 7, 31, 43, 49, 52, 26, 13, 34, 17, 36, 18, 9, 32, 16, 8, 4, 2)$

$L_2 = (3, 29, 42, 21, 38, 19, 37, 46, 23, 39, 47, 51, 53, 27, 41, 48, 24, 12, 6)$

$L_3 = (5, 30, 15, 35, 45, 50, 25, 40, 10)$

$L_4 = (11, 33, 44, 22)$

よって，$l_1 = 20, l_2 = 19, l_3 = 10, l_4 = 4$となり，

$$\text{周期} = Lcm(l_1, l_2, l_3, l_4) = Lcm(20, 19, 10, 4) = 380$$

である。