スターリングの公式の証明

宇都宮潔

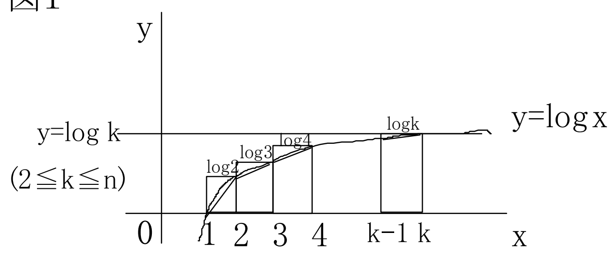
2024年12月24日

スターリングの公式 ① $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

② $\log n! \sim n\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi n)$

文献[1] 小島寛之,『素数ほどステキな数はない』, 技術評論社,2021, P241～242.

図1



小さな三角形の和で近似すると, 合計は

$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\{\log k - \log(k-1)\} = \boxed{\frac{1}{2}\log n}$ に近い。

$\frac{1}{2}(\log 2 - 1) + \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2) + \frac{1}{2}(\log 4 - \log 3) + \cdots + \frac{1}{2}(\log n - \log(n-1)) = \frac{1}{2}\log n.$

以下のように細かく計算しても分からない。

しかし,…。

$$k=2,3,\cdots n;\ S_k = \log k - \int_{k-1}^{k}\log x\,dx = \log k - [x\log x - x]_{k-1}^{k}$$

$$= \log k - [(k\log k - k) - \{(k-1)\log(k-1) - (k-1)\}]$$

$$= \log k - [(k\log k - k) - \{k\log(k-1) - \log(k-1) - k + 1\}]$$

$$= \log k - \{k\log k - k - k\log(k-1) + \log(k-1) + k - 1\}$$

$$= \log k - k\log k + k\log(k-1) - \log(k-1) + 1 = 1 - (k-1)\log k + (k-1)\log(k-1)$$

$$= 1 - (k-1)\{\log k - \log(k-1)\}$$

$$= 1 - (k-1)\log\frac{k}{k-1} = 1 - (k-1)\log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$$

$$= 1 - \log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \quad (k=2,3,\cdots,n)$$

$$S_n = 1 - \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to 1 - \log e = 0 \ (n \to \infty)$$

$$S_2 = 1 - \log 2 = 0.698\cdots > 0,\quad S_3 = 1 - 3\log\frac{3}{2} = 0.471\cdots > 0$$

$$S_k = 1 - (k-1)\log k + (k-1)\log(k-1)$$

$$= 1 - k\log k + (k-1)\log(k-1) + \log k$$

$$= 1 + \log k - \{k\log k - (k-1)\log(k-1)\}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n} S_k = (n-1) + \log(2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n) - n\log n$$

$$= \log n! - n\log n + n - 1$$

上の図1より，明らかに，

(1) $$0<\log n! - n\log n + n-1 < \frac{1}{2}\log n$$

であり，n→∞のとき，$\frac{1}{2}\log n-\{\log n! - n\log n + n-1\} \to 0$

そこで，この差の式を $\delta_n= n\log n-\log n!-n+1+\frac{1}{2}\log n$ とおけば，

$$\delta_n= n\log n-\log (n-1)!-\log n-n+1+\frac{1}{2}\log n$$

$$= n\log n-n+1-\log (n-1)!-\frac{1}{2}\log n, \qquad \Gamma(n)=(n-1)!$$

$\log \Gamma(n)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+1-\delta_n$ ⇐ これが下記文献[2]の(18.9)式である。

文献[2] 現代応用数学の基礎/微分積分，別冊・数学セミナー，日本評論社，1993年

垣田高夫・笠原こう司・廣瀬健・森毅

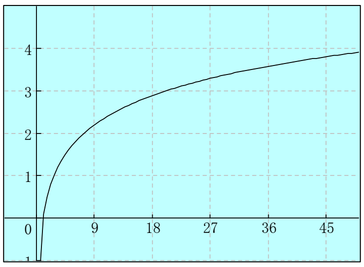
P257～259の証明の誤りを赤字や図などで正す。

*項目(1)は文献[1]の図形の大小のミスを $A_n < B_n$ と正す目的で記した。

A_n と B_n はともに横幅1/2同士で，高さの差は $\log\frac{k+1/2}{k}$ と $\log\frac{k}{k-1/2}$ であるが，

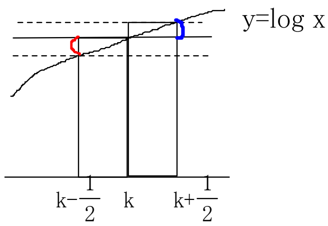
B_n の方が A_n よりも大きい訳は，関数y=log xが上に凸で，単調増加のためである。

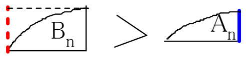
$$\ln(k)-\ln(k-1/2)>\ln(k+1/2)-\ln(k) \Leftrightarrow 2\ln(k)-\{\ln(k+1/2)+\ln(k-1/2)\}=\ln\frac{k^2}{k^2-1/4}>0.$$



グラフは上に凸で，

関数は単調増加ゆえ





赤の長さ= log k−log(k−1/2)>青の長さ=log(k+1/2)−log k

【① $B_k>A_k$ の積分による証明 】

$$A_k= \int_k^{k+1/2}\ln(x)dx-\frac{1}{2}\ln(k),\ B_k= \frac{1}{2}\ln(k)-\int_{k-1/2}^{k}\ln(x)dx$$

$$B_k-A_k=\frac{1}{2}\ln(k)-\int_{k-1/2}^{k}\ln(x)dx-\left\{\int_k^{k+1/2}\ln(x)dx-\frac{1}{2}\ln(k)\right\}=\ln(k)-\left\{\int_k^{k+1/2}\ln(x)dx+\int_{k-1/2}^{k}\ln(x)dx\right\}$$

$$=\ln(k)-\int_{k-1/2}^{k+1/2}\ln(x)dx=\ln(k)-[\,x\ln(x)-x\,]_{k-1/2}^{k+1/2} \qquad =$$

$$\ln(k)-\left[\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}-\left\{\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$

$$=1+\ln(k)-\left\{\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{2k+1}{2k-1}-\left\{\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\ln(k)\right\}=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{2k+1}{2k-1}-\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)$$

$$=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k-1/2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

$$\to 1-\ln e+\ln 1=0\ (k\to\infty)$$

$$S(k)=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k-1/2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

S(1)= 1−0.5*ln3−ln1.5= $4.52287475577805\times10^{-2}$

S(1)= $4.5228747557780772324\times10^{-2}$

S(2)= 1−1.5*ln(5/3)−ln1.25= $1.06180130368035\times10^{-2}$

S(2)= $1.0618013036804219425\times10^{-2}$

S(10)= $4.1697953923390026478\times10^{-4}$

S(10^2)= $4.1666979170386969601\times10^{-6}$

S(10^3)= $4.1666669791663711909\times10^{-8}$

S(10^4)= $4.1666666706445778956\times10^{-10}$

S(10^5)= $4.16666666669791668137682851 73\times10^{-12}$

$$S(k)=1-\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k-1/2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)>1-k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=1-(k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\to 0\ (k\to\infty)$$

$$T(k)=1-(k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$1+\frac{1}{2k}<1+\frac{1}{k+1},\ \ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right),$$

T(1)= 1−2*ln1.5= $1.89069783783671\times10^{-1}$

T(1)= $1.8906978378367123604\times10^{-1}$

T(2)= 1−3*ln(4/3)= $1.36953782644656\times10^{-1}$

T(2)= $1.3695378264465721768\times10^{-1}$

T(10)= $4.2874853114072572154575079388 8\times10^{-2}$

T(10^2)= $4.9180592558253520408153565753 4\times10^{-3}$

T(10^3)= $4.9916808088762570418347599429 3\times10^{-4}$

T(10^4)= $4.9991668083088376325691847998 2\times10^{-5}$

T(10^5)= $4.9999166680833088337634254241 9\times10^{-6}$

T(1.2*10^{11})= $4.1666666668227108392092736458 8\times10^{-12}$

② ［P257下から7行目から］

n! は $n\to\infty$ のとき急激に増大する． しかし n^n はさらに増大度が大きい．この増大度をどの程度にコントロールすれば n!の増大度になるか． この答がスターリング (J. Stirling)の公式で与えられる．すなわち

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\qquad(18.8)$$

が成立する．これをウォリスの公式から導こう．

長方形の和の面積=log k > $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$[注1] に注目すると，

P258の記述式は誤りで，次式(2)が正しい．

[注1]

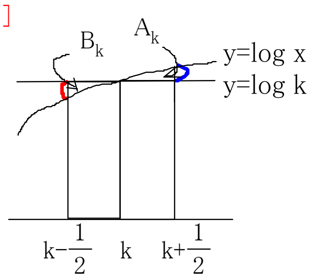


図18.1 赤色部が青よりも長く $\boxed{B_k>A_k}$ が正しい。

$$(2)\qquad \int_1^n\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n>\log(n-1)!=\sum_{k=1}^{n-1}\log k>\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x dx$$

［理由］

x>k−1 (k≧2)のとき，区間[k−1,k]で，$\ln x-\ln(k-1)>\dfrac{1}{2x}$から[図と注]，

$$\int_{k-1}^{k}\{\ln(x)-\ln(k-1)dx>\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\{\ln(k)-\ln(k-1)\}$$

$$\therefore\ \sum_{k=2}^{n}\left\{\int_{k-1}^{k}\ln(x)dx-\ln(k-1)\right\}=\int_1^n\ln(x)dx-\ln(n-1)!>\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\{\ln(k)-\ln(k-1)\}=\frac{1}{2}\ln(n)$$

したがって，

$$\int_1^n\ln(x)dx-\ln(n-1)!>\frac{1}{2}\ln(n)\Leftrightarrow\int_1^n\ln(x)dx-\frac{1}{2}\ln(n)>\ln(n-1)!$$

そこで，

$$\delta_n = \int_1^n \log x dx - \sum_{k=1}^{n-1} \log k - \frac{1}{2}\log n$$

とおくとき，右辺は

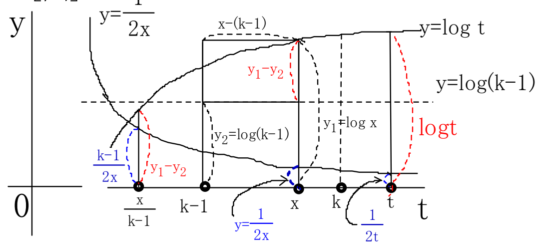
$$n\log n - n + 1 - \log(n-1)! - \frac{1}{2}\log n.$$

したがって，

$$\log \Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 - \delta_n. \qquad (18.9)$$

なお，本文中の図18.2を省略する.

[図]



［注］ $y_1 - y_2 = \log x - \log(k-1)$

$t \geqq 2$ に対して，$\log t > \frac{1}{2t} \cdots$ (a) だから，

$t = \frac{x}{k-1}$ を代入して，$\log\frac{x}{k-1} > \frac{k-1}{2x} > \frac{1}{2x}$

$(k=2,3,\cdots)$

(a)式は図からも推測可能だが，微分法により成り立つことが容易に証明できる。

P259　　ここで　δ_nは，図形的には図18.2の曲線の下の部分の面積A_kの和 $\sum_{k=1}^{n-1} A_k$を曲線の上の部分の面積B_kの和 $\sum_{k=1}^{n-1} B_k$を引いたものに等しい．すなわち，

$$\delta_n = B_1 - A_1 + B_2 - A_2 + \cdots\cdots + B_{n-1} + A_{n-1}.$$

log xが上に凸という性質から　$B_1 > A_1 > B_2 > A_2 > \cdots\cdots$であり，また

$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0$ であるから，極限

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n$$

が存在する（定理13.5）[注2].

［注2］ 定理13.5　交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ について，$\{a_n\}$が0に収束する正の単調

減少数列.ならば，この級数は収束する

したがって $\mu_n = \delta - \delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$である．$c = e^{1-\delta}$とおくとき（18.9)から

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-\delta_n} = cn^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n}. \qquad (18.10)$$

ここで，cの値を定めるためにウォリスの公式

$$a_n = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi} \quad (n \to \infty) \qquad (18.11)$$

をもちいることにしよう．(18.10)から

$$n! = cn^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n}.$$

これを a_nに代入すると　$c > 0$ より

$$a_n=\frac{c^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{2\mu_n} 2^{2n}}{c(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\mu_{2n}}}=\frac{c}{\sqrt{2}} e^{2\mu_n-\mu_{2n}}.$$

n→∞として (18.11)をもちいると $c=\sqrt{2\pi}$. よって

$$\Gamma(n)=\sqrt{2\pi}\, n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n}.$$

両辺に nをかけて

$$n!=\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu_n} \qquad (n\to\infty)$$

これを(18.8)のように表してもよい. □