# 乗数付 オイラー型 メルセンヌ超完全数

飯高 茂

平成 32 年 5 月 19 日

## 1 乗数付 オイラー型 メルセンヌ超完全数

$h > 2$ を素数として, $a = h * 2^e + m + 1$ を素数と仮定する.
すると, $\varphi(a) = a - 1 = h * 2^e + m$.
$\varphi(a) - m = h * 2^e$ となる.
$A = \varphi(a) - m$ とおくとき, $A = h * 2^e$ となる.
$\varphi(h) = h - 1 = 2k$ で $k$ を定める.
$\varphi(A) = \varphi(h * 2^e) = 2^e k$ が成り立つので $2h$ 倍する.
$a - m - 1 = h * 2^e$ を用いて $2h\varphi(A) = 2h * 2^e k = 2k(a - m - 1)$ を得る.
そこで, $a = h * 2^e + m + 1$ とおいたことを忘れて 未知自然数 $a, A$ についての連立方程式 ($\overline{h} = h - 1$ を用いる)

$$A = \varphi(a) - m, 2h\varphi(A) = \overline{h}(a - m - 1) \tag{1}$$

を満たす $a$ を平行移動 $m$, 乗数 $h$ の オイラー型 メルセンヌ超完全数, $A$ を そのパートナーという.

**命題 1 (Miyamoto)** 解 $a$ が素数なら, $A = 2^e h^f, (e > 0, f > 0)$.
逆も成り立つ

**Proof**
$a$ を素数とする.
$A = \varphi(a) - m, 2h\varphi(A) = \overline{h}(a - m - 1)$ を満たすので, $A = \varphi(a) - m = a - 1 - m$ によって
$2h\varphi(A) = \overline{h}(a - m - 1) = \overline{h}A$.
$h, \overline{h}$ は互いに素なので, $h|A$. よって, $A = h^e L, (h \not| L)$ と書ける.

$$2h\varphi(A) = 2\overline{h}h^e\varphi(L) = \overline{h}A = \overline{h}h^e L.$$

$\overline{h} = 2k$ とおくと,

$$\overline{h}h^e\varphi(L) = kh^e L.$$

これより, $2\varphi(L) = L$. ゆえに $L = 2^f, f > 0$. よって, $A = h^e L = h^e 2^f$.

逆に, $A=h^e 2^f, (e, f>0)$ とすると, $\varphi(A)=\overline{h}h^{e-1}2^{f-1}$.
よって, $h\varphi(A)=\overline{h}h^e 2^{f-1}=kA$.
$2h\varphi(A)=\overline{h}(a-m-1)$ を満たしているので,

$$\overline{h}(a-m-1)=2h\varphi(A)=2kA=2k(\varphi(a)-m).$$

$\overline{h}=2k$ によれば $\overline{h}(a-m-1)=2k(\varphi(a)-m)=\overline{h}(\varphi(a)-m)$.
よって $a-m-1=\varphi(a)-m$. ゆえに $a-1=\varphi(a)$.
$a$ は素数が示された.

**q.e.d.**

## 2　$h = 3$ の場合

以後 $h = 3$ の場合に限定する.

表 1: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m = -10$ | | | |
| 3 | 3 | 12 | $2^2 * 3$ |
| 21 | $3 * 7$ | 22 | $2 * 11$ |
| 27 | $3^3$ | 28 | $2^2 * 7$ |
| 39 | $3 * 13$ | 34 | $2 * 17$ |
| 57 | $3 * 19$ | 46 | $2 * 23$ |
| 111 | $3 * 37$ | 82 | $2 * 41$ |
| 129 | $3 * 43$ | 94 | $2 * 47$ |
| 201 | $3 * 67$ | 142 | $2 * 71$ |
| 237 | $3 * 79$ | 166 | $2 * 83$ |
| 243 | $3^5$ | 172 | $2^2 * 43$ |
| 291 | $3 * 97$ | 202 | $2 * 101$ |
| 309 | $3 * 103$ | 214 | $2 * 107$ |

$A = \varphi(a) - m, 2h\varphi(A) = \overline{h}(a - m - 1)$ は $h = 3, m = -10$ のとき,

$$A = \varphi(a) + 10, 3\varphi(A) = a + 9.$$

$a$ は 3 の倍数, $A$ は 2 の倍数 なので, $a = 3^e L, A = 2^f M$.
次式が成り立つ.

$$2 = 2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) + 2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L).$$

1) $2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) = 2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 1$ のときと　$e = f = 1, L = p, M = q$ は素数. とくに, $q = p + 4$: いとこ素数.
2) $2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) = 2, e^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) =$ のときと $f = 2, M = p$ は素数. $L = 1, A = 4p, a = 3^e$. $2p = 3^{e-1} + 5$.
例 $a = 3^5, e = 5, A = 4p, p = 43, 2p = 86 = 3^4 + 5$

表 2: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-9$ | | | |
| 28 | $2^2*7$ | 21 | $3*7$ |
| 52 | $2^2*13$ | 33 | $3*11$ |
| 124 | $2^2*31$ | 69 | $3*23$ |
| 172 | $2^2*43$ | 93 | $3*31$ |
| 244 | $2^2*61$ | 129 | $3*43$ |
| 268 | $2^2*67$ | 141 | $3*47$ |
| 388 | $2^2*97$ | 201 | $3*67$ |
| 412 | $2^2*103$ | 213 | $3*71$ |
| 604 | $2^2*151$ | 309 | $3*103$ |
| 628 | $2^2*157$ | 321 | $3*107$ |
| 772 | $2^2*193$ | 393 | $3*131$ |
| 820 | $2^2*5*41$ | 329 | $7*47$ |
| 892 | $2^2*223$ | 453 | $3*151$ |
| 964 | $2^2*241$ | 489 | $3*163$ |

$A=\varphi(a)-m, 2h\varphi(A)=\overline{h}(a-m-1)$ は $h=3, m=-9$ のとき,

$$A=\varphi(a)+9, 3\varphi(A)=a+8.$$

$A$ を 3 の倍数と仮定すると,$a=4p, A=3q; 3q=2p+7$. ここで素数列 $\{p\},\{q\}$ には関係 $3q=2p+7$ が成り立ちこれを素数列の共鳴するという.

表 3: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-7$ | | | |
| 54 | $2*3^3$ | 25 | $5^2$ |
| 60 | $2^2*3*5$ | 23 | 23 |
| 84 | $2^2*3*7$ | 31 | 31 |
| 132 | $2^2*3*11$ | 47 | 47 |
| 204 | $2^2*3*17$ | 71 | 71 |
| 228 | $2^2*3*19$ | 79 | 79 |
| 372 | $2^2*3*31$ | 127 | 127 |
| 444 | $2^2*3*37$ | 151 | 151 |
| 492 | $2^2*3*41$ | 167 | 167 |
| 564 | $2^2*3*47$ | 191 | 191 |
| 708 | $2^2*3*59$ | 239 | 239 |
| 804 | $2^2*3*67$ | 271 | 271 |

表 4: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-4$ | | | |
| 3 | 3 | 6 | $2*3$ |
| 9 | $3^2$ | 10 | $2*5$ |
| 21 | $3*7$ | 16 | $2^4$ |
| 27 | $3^3$ | 22 | $2*11$ |
| 81 | $3^4$ | 58 | $2*29$ |
| 93 | $3*31$ | 64 | $2^6$ |
| 243 | $3^5$ | 166 | $2*83$ |
| 381 | $3*127$ | 256 | $2^8$ |
| 19683 | $3^9$ | 13126 | $2*6563$ |
| 24573 | $3*8191$ | 16384 | $2^14$ |

定義式 $A=\varphi(a)-m, 2h\varphi(A)=\overline{h}(a-m-1)$ は $h=3, m=-4$ のとき,

$$A=\varphi(a)+4, 3\varphi(A)=a+3.$$

これより,$A$ は偶数,$a$ は 3 の倍数. $A=2^eL, (2 \not| L), a=3^fM, (3 \not| M)$ と書ける.

$$A-\varphi(a)-4=2^eL-2*3^{f-1}\varphi(M)-4$$

これより

$$2^{e-1}L = 3^{f-1}\varphi(M) + 2$$

$$3\varphi(A) - a - 3 = 3 * 2^{e-1}\varphi(L) - 3^f M - 3.$$

これより $2^{e-1}\varphi(L) = 3^{f-1}M + 1$.
上の 2 式を引くと

$$2^{e-1}(L - \varphi(L)) = -3^{f-1}(\varphi(M) - M) + 1.$$

ゆえに

$$2^{e-1}(L - \varphi(L)) + 3^{f-1}(M - \varphi(M)) = 1.$$

余関数を使うと

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) + 3^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) = 1.$$

(1) $\mathrm{co}\varphi(L) = 0$ のとき $L = 1; A = 2^e$, $3^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) = 1$. ゆえに, $f = 1, \mathrm{co}\varphi(M) = 1$. $M = q$:素数.
$2^{e-1}\varphi(L) = 3^{f-1}M + 1$ を用いて,$2^{e-1} = q + 1; q = 2^{e-1} - 1$ : メルセンヌ素数.

(2) $\mathrm{co}\varphi(M) = 0$ のとき $M = 1$,$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 1; e = 1. L = q$ : 素数.
$2^{e-1}\varphi(L) = 3^{f-1}M + 1$ により $q - 1 = 3^{f-1} + 1; q = 3^{f-1} + 2$.

**定理 1** $m = -4$ のとき, *(1)* $\mathrm{co}\varphi(L) = 0$ のとき $L = 1; A = 2^e$, $3^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M) = 1$. ゆえに, $f = 1, \mathrm{co}\varphi(M) = 1$. $M = q$:素数.
$A = 2^e, a = 3q, q = 2^{e-1} - 1$ : 素数.
*(2)* $\mathrm{co}\varphi(M) = 0$ のとき $M = 1$,$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 1; e = 1. L = q$ : 素数.
$A = 2q, a = 3^f, q = 3^{f-1} + 2$.

表 5: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-3$ | | | |
| 52 | $2^2*13$ | 27 | $3^3$ |
| 4372 | $2^2*1093$ | 2187 | $3^7$ |

$m=-3$ のとき方程式は $A=\varphi(a)+3, 3\varphi(A)=a+2$ となる. 結果は $A=3^f$ などとなり著しい性質を持つ.

完全な証明はできないが, 興味ある結果が得られた.

これより, $a$ は偶数となる.

**定理 2** *$A$ を 3 の倍数と仮定すると, $a=3q, A=3^f, 3^f=2q+1, (q$ は素数$)$ となる.*

**Proof** 条件式より, $a$ は偶数となる.

$a=2^eL, (2 \nmid L)$ とおくとき,

$$A=\varphi(a)+3=2^{e-1}\varphi(L)+3, 3\varphi(A)=a+2=2^eL+2.$$

ここで, $A$ を 3 の倍数と仮定したので, $A=3^fM, (3 \nmid M)$ とおく.

$$3^fM=2^{e-1}\varphi(L)+3, 3\varphi(A)=2*3^f\varphi(M)=2^eL+2.$$

$3^f\varphi(M)=2^{e-1}L+1$ を $3^fM=2^{e-1}\varphi(L)+3$ 　から引くと

$$3^f(M-\varphi(M)=2^{e-1}(\varphi(L)-L)+2$$

$3^f\text{co}\varphi(M)+2^{e-1}\text{co}\varphi(L)=2.$

これより.$\text{co}\varphi(M)=0$. したがって, $M=1.A=3^f$.

さらに $2^{e-1}\text{co}\varphi(L)=2$.

$e=1$ なら, $\text{co}\varphi(L)=2$ になり, $L=4$. 本来奇数なので矛盾.

$e=2$ なら, $\text{co}\varphi(L)=1$ になり, $L=q$: 素数.

$A=\varphi(a)+3$ に代入すると, $3^f=\varphi(a)+3=2q+1$.

これは $3\varphi(A)=a+2$ を満たす.

**q.e.d.**

次に数値計算の結果を載せる.

$q=\dfrac{3^f-1}{2}$ :素数

| $f$ | $q = \dfrac{3^f - 1}{2}$ :素数 |
|---|---|
| 3 | 13 |
| 7 | 1093 |
| 13 | 797161 |
| 71 | 3754733257489862401973357979128773 |

**注意 1** $q = \dfrac{3^f - 1}{2}$ と書ける素数は無限にあるだろうか.

表 6: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-2$ | | | |
| 5 | 5 | 6 | $2*3$ |
| 11 | 11 | 12 | $2^2*3$ |
| 17 | 17 | 18 | $2*3^2$ |
| 23 | 23 | 24 | $2^3*3$ |
| 35 | $5*7$ | 26 | $2*13$ |
| 47 | 47 | 48 | $2^4*3$ |
| 53 | 53 | 54 | $2*3^3$ |
| 71 | 71 | 72 | $2^3*3^2$ |
| 107 | 107 | 108 | $2^2*3^3$ |
| 191 | 191 | 192 | $2^6*3$ |
| 383 | 383 | 384 | $2^7*3$ |
| 431 | 431 | 432 | $2^4*3^3$ |
| 575 | $5^2*23$ | 442 | $2*13*17$ |
| 623 | $7*89$ | 530 | $2*5*53$ |

表 7: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=-1$ | | | |
| 6 | $2*3$ | 3 | 3 |
| 12 | $2^2*3$ | 5 | 5 |
| 18 | $2*3^2$ | 7 | 7 |
| 36 | $2^2*3^2$ | 13 | 13 |
| 48 | $2^4*3$ | 17 | 17 |
| 54 | $2*3^3$ | 19 | 19 |
| 108 | $2^2*3^3$ | 37 | 37 |
| 216 | $2^3*3^3$ | 73 | 73 |
| 288 | $2^5*3^2$ | 97 | 97 |
| 324 | $2^2*3^4$ | 109 | 109 |
| 486 | $2*3^5$ | 163 | 163 |
| 576 | $2^6*3^2$ | 193 | 193 |
| 768 | $2^8*3$ | 257 | 257 |

$A=\varphi(a)+1, 3\varphi(A)=a$ なので, $a=3^eL, (3\not| L)$,

$A=1,2$ は起きないので, $3\varphi(A)=a$ は偶数になり, $L$ も 偶数. $L=2^fM, (2\not| M)$ と書ける.

$A=\varphi(a)+1=2*3^{e-1}\varphi(L)+1=2^f*3^{e-1}\varphi(M)+1$,

$$A=2^f*3^{e-1}\varphi(M)+1.$$

$3\varphi(A)=a=3^eL=3^e2^fM$. よって,

$$\varphi(A)=3^{e-1}2^fM.$$

これより,

$$A-\varphi(A)+1=-3^{e-1}2^f(M-\varphi(M).$$

オイラーの余関数 $\mathrm{co}\varphi(A)=A-\varphi(A)$ 　を用いて

$$1=\mathrm{co}\varphi(A)+3^{e-1}2^f\mathrm{co}\varphi(M).$$

よって, $1=\mathrm{co}\varphi(A), 3^{e-1}2^f\mathrm{co}\varphi(M)=0$. よって, $M=1, a=3^e2^f, A=\varphi(3^e2^f)+1=3^{e-1}2^f+1:($ 素数$)$.

**定理 3** *オイラー型メルセンヌ超完全数において,* $m=-1$ *のとき,* $a=3^e2^f, (e,f>0), A=3^{e-1}2^f+1:($ *素数).*

これが必要条件なことは示せたので, この逆を示す.

**Proof** $A=3^{e-1}2^f+1$ は素数なので, $\varphi(A)=3^{e-1}2^f+1$.

$a=3^e2^f$ とおくとき, $3\varphi(A)=3^e2^f$ **q.e.d.**

## 3 $m = 0$

表 8: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m = 0$ | | | |
| 4 | $2^2$ | 2 | 2 |
| 7 | 7 | 6 | $2 * 3$ |
| 13 | 13 | 12 | $2^2 * 3$ |
| 19 | 19 | 18 | $2 * 3^2$ |
| 25 | $5^2$ | 20 | $2^2 * 5$ |
| 37 | 37 | 36 | $2^2 * 3^2$ |
| 73 | 73 | 72 | $2^3 * 3^2$ |
| 97 | 97 | 96 | $2^5 * 3$ |
| 109 | 109 | 108 | $2^2 * 3^3$ |
| 121 | $11^2$ | 110 | $2 * 5 * 11$ |
| 145 | $5 * 29$ | 112 | $2^4 * 7$ |
| 163 | 163 | 162 | $2 * 3^4$ |
| 193 | 193 | 192 | $2^6 * 3$ |
| 433 | 433 | 432 | $2^4 * 3^3$ |
| 487 | 487 | 486 | $2 * 3^5$ |
| 577 | 577 | 576 | $2^6 * 3^2$ |
| 769 | 769 | 768 | $2^8 * 3$ |

定義式 $A = \varphi(a) - m, 2h\varphi(A) = \overline{h}(a - m - 1)$ は $h = 3, m = 0$ のとき,

$$A=\varphi(a), 3\varphi(A)=a-1.$$

$a$: 素数なら, $A=2^e 3^f$.
しかし素数では無い解もある.
そこで, $a=p^2$: $p$:素数と仮定しよう.

1) $p=2$ のとき, $A=2$, $a-1=3\varphi(A)=3, a=4$.

2) $p>2$ のとき, ($p$: 奇素数).
$A=\varphi(p^2)=p(p-1), 3\varphi(A)=a-1=(p+1)(p-1)$
$p-1=2k$ とおくとき,$A=2pk$.
$\varphi(A)=\varphi(2k*p)=\varphi(2k)*(p-1)$.

$$3\varphi(2k)*(p-1)=3\varphi(A)=a-1=(p+1)(p-1)$$

によって,$p-1$ を除去して,

$$3\varphi(2k)=p+1=2k+2.$$

$k=2^\varepsilon L, (2 \not| L)$ とおけば

$$3\varphi(2k)=3\varphi(2^{\varepsilon+1}L)=3*2^\varepsilon\varphi(L)=2k+2=2^{\varepsilon+1}L+2.$$

$$3*2^\varepsilon\varphi(L)=2^{\varepsilon+1}L+2.$$

これより, $2^\varepsilon(3\varphi(L)-2L)=2$.
1) $L=1$ のとき, $2^\varepsilon(3\varphi(L)-2L)=2^\varepsilon=2$. $\varepsilon=1, k=2, p=5$. $A=2kp=10$, $a-1=3\varphi(A)=3*4=12; a=13$.
1) $L\geq 3$ のとき, $2^\varepsilon(3\varphi(L)-2L)=2$, によって, $\varepsilon=0$ になり,

$$3\varphi(L)=2L+2,$$

この方程式は非常に意味がある.
パソコンで解を求めると, $L=5, 35=5*7, 1295=5*7*37, 5*7*37*1297$ が解
$p=2L+1=11, 71, 2*1295+1=2591$ これらは素数であり,
$2*5*7*37*1297+1=47*71473$ は合成数.
$p=11$ なら ,71,2*1295+1=2591これらは素数であり,
$p=2L+1=11, 71, 2*1295+1=2591$, $2*5*7*37*1297+1=47*71473$
$L=5, (5+2=7), 35=5*7, (35+2=37), 1295=5*7*37, (5*7*37+2=1297), 5*7*37*1297$ が解で,
$p=2L+1=11, 71, 2*1295+1=2591$, $2*5*7*37*1297+1=47*71473$

$p = 11$ のとき

$A = \varphi(p^2) = p(p-1) = 2 * 5 * 11, a - 1 = 3\varphi(A) = a - 1 = (p+1)(p-1) = 120 = 2^3 * 3 * 5, a = 121 = 11^2$

$p = 71$ のとき

$A = \varphi(p^2) = p(p-1) = 2*5*7*71, a-1 = 3\varphi(A) = a-1 = (p+1)(p-1) = 71^2-1 = 5040 = 2^4 * 3^2 * 5 * 7 = 7!, a = 5041 = 71^2.$

$p = 2591$ のとき

表 9: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ 非素数解 | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m=0$ | | | |
| 4 | $2^2$ | 2 | 2 |
| 25 | $5^2$ | 20 | $2^2 * 5$ |
| 121 | $11^2$ | 110 | $2 * 5 * 11$ |
| 145 | $5 * 29$ | 112 | $2^4 * 7$ |
| 5041 | $71^2$ | 4970 | $2 * 5 * 7 * 71$ |
| 6713281 | $2591^2$ | 6710690 | $2 * 5 * 7 * 37 * 2591$ |

$3\varphi(a) = 2a + 2$ を満たすとき, $a' = ap, p > a$ : 素数, も解とする.

$3\varphi(a') = 3\varphi(a)(p-1) = (2a+2)(p-1) = 2a' + 2 = 2ap + 2$ により

$0 = (2a+2)(p-1) - (2ap+2) = 2((a+1)(p-1) - ap - 1) = 2(p - a - 2)$ によると, $p = a + 2$.

表 10: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m = 1$ | | | |
| 2 | 2 | 0 | 0 |
| 8 | $2^3$ | 3 | 3 |
| 14 | $2 * 7$ | 5 | 5 |
| 20 | $2^2 * 5$ | 7 | 7 |
| 74 | $2 * 37$ | 35 | $5 * 7$ |
| 140 | $2^2 * 5 * 7$ | 47 | 47 |
| 938 | $2 * 7 * 67$ | 395 | $5 * 79$ |
| 2594 | $2 * 1297$ | 1295 | $5 * 7 * 37$ |
| 295106 | $2 * 7 * 107 * 197$ | 124655 | $5 * 107 * 233$ |

表 11: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| $m = 1$ | | | |
| 14 | $2 * 7$ | 5 | 5 Class I |
| 74 | $2 * 37$ | 35 | $5 * 7$ |
| 2594 | $2 * 1297$ | 1295 | $5 * 7 * 37$ |
| 20 | $2^2 * 5$ | 7 | 7 Class II |
| 140 | $2^2 * 5 * 7$ | 47 | 47 |
| 938 | $2 * 7 * 67$ | 395 | $5 * 79$ |
| 295106 | $2 * 7 * 107 * 197$ | 124655 | $5 * 107 * 233$ |

$m = 1$

$$A = \varphi(a) - 1, 3\varphi(A) = a - 2.$$

$a = 2^e L, (2 \not| L)$ とする.
$A = 2^{e-1}\varphi(L) - 1, 3\varphi(A) = 2^e L - 2.$
この解から種別に従い分類する.
$\beta$ を $3\sigma(\beta) = 2\beta + 2$ の解とする, $(\beta = 5, 35 = 5 * 7, 1295 = 5 * 7 * 37, \beta + 2)$:素数.

Class I のとき $e = 1; a = 2L, A = \beta,$
$3\varphi(A) = a - 2$ により
$3\varphi(\beta) = a - 2 = 2L - 2, 3\varphi(\beta) = 2\beta + 2$ により $2L - 2 = 2\beta + 2.$
$(\beta = 5, 35 = 5 * 7, 1295 = 5 * 7 * 37, \beta + 2)$:素数.

これより $L=\beta+2$: 素数.

Class II のとき $a=2^2\beta$,
$A=\varphi(a)-1=2\varphi(\beta)-1, 3\varphi(A)=4\beta-2$.
$3A=2*3\varphi(\beta)-3=4\beta+1, 3\varphi(A)=4\beta-2$ によれば,
$3A-3=4\beta-2=3\varphi(A)$. $A=1+\varphi(A)$. $A$ は素数.
$3A-3=3\varphi(A)=4\beta-2, 3A=4\beta+1$,
$\beta=5, A=(4\beta+1)/3=7$,
$\beta=35, A=(4\beta+1)/3=47$,
$\beta=1295, A=(4\beta+1)/3=5181/3=11*157$:素数にならない
$\beta=5,35$ のときのみ解

表 12: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 2 | | | |
| 3 | 3 | 0 | 0 |
| 9 | $3^2$ | 4 | $2^2$ |
| 27 | $3^3$ | 16 | $2^4$ |
| m= 3 | | | |
| 16 | $2^4$ | 5 | 5 |
| 22 | $2*11$ | 7 | 7 |
| 40 | $2^3*5$ | 13 | 13 |
| 580 | $2^2*5*29$ | 221 | $13*17$ |

定義式 $A=\varphi(a)-m, 2h\varphi(A)=\overline{h}(a-m-1)$ は $h=3, m=2$ のとき,

$$A=\varphi(a)-2, 3\varphi(A)=a-3.$$

$A=2^eL, a=3^fM$ となりこれから

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)+3^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M)=0.$$

$L=M=1, A=2^e, a=3^f$. $2^e=A=\varphi(a)-2=2*3^{f-1}-2$
$2^{e-1}=3^{f-1}-1$. i. $e-1=1, f=2$; ii. $e-1=3, f-1=2$.

表 13: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 4 | | | |
| 5 | 5 | 0 | 0 |
| 11 | 11 | 6 | $2*3$ |
| 17 | 17 | 12 | $2^2*3$ |
| 23 | 23 | 18 | $2*3^2$ |
| 29 | 29 | 24 | $2^3*3$ |
| 41 | 41 | 36 | $2^2*3^2$ |
| 53 | 53 | 48 | $2^4*3$ |
| 59 | 59 | 54 | $2*3^3$ |
| 65 | $5*13$ | 44 | $2^2*11$ |
| 77 | $7*11$ | 56 | $2^3*7$ |
| 101 | 101 | 96 | $2^5*3$ |
| 113 | 113 | 108 | $2^2*3^3$ |
| 149 | 149 | 144 | $2^4*3^2$ |
| 167 | 167 | 162 | $2*3^4$ |
| 197 | 197 | 192 | $2^6*3$ |
| 245 | $5*7^2$ | 164 | $2^2*41$ |
| 293 | 293 | 288 | $2^5*3^2$ |
| 389 | 389 | 384 | $2^7*3$ |
| 491 | 491 | 486 | $2*3^5$ |
| 653 | 653 | 648 | $2^3*3^4$ |
| 773 | 773 | 768 | $2^8*3$ |
| 977 | 977 | 972 | $2^2*3^5$ |

表 14: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 6 | | | |
| 7 | 7 | 0 | 0 |
| 10 | $2 * 5$ | -2 | $-2$ |
| 13 | 13 | 6 | $2 * 3$ |
| 19 | 19 | 12 | $2^2 * 3$ |
| 25 | $5^2$ | 14 | $2 * 7$ |
| 31 | 31 | 24 | $2^3 * 3$ |
| 43 | 43 | 36 | $2^2 * 3^2$ |
| 55 | $5 * 11$ | 34 | $2 * 17$ |
| 61 | 61 | 54 | $2 * 3^3$ |
| 79 | 79 | 72 | $2^3 * 3^2$ |
| 103 | 103 | 96 | $2^5 * 3$ |
| 151 | 151 | 144 | $2^4 * 3^2$ |
| 187 | $11 * 17$ | 154 | $2 * 7 * 11$ |
| 199 | 199 | 192 | $2^6 * 3$ |
| 223 | 223 | 216 | $2^3 * 3^3$ |
| 331 | 331 | 324 | $2^2 * 3^4$ |
| 439 | 439 | 432 | $2^4 * 3^3$ |
| 835 | $5 * 167$ | 658 | $2 * 7 * 47$ |
| 1303 | 1303 | 1296 | $2^4 * 3^4$ |
| 1543 | 1543 | 1536 | $2^9 * 3$ |
| 1951 | 1951 | 1944 | $2^3 * 3^5$ |
| 2311 | 2311 | 2304 | $2^8 * 3^2$ |
| 3079 | 3079 | 3072 | $2^10 * 3$ |
| 3463 | 3463 | 3456 | $2^7 * 3^3$ |
| 5839 | 5839 | 5832 | $2^3 * 3^6$ |
| 6151 | 6151 | 6144 | $2^11 * 3$ |

表 15: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 7 | | | |
| 38 | $2*19$ | 11 | 11 |
| 44 | $2^2*11$ | 13 | 13 |
| 56 | $2^3*7$ | 17 | 17 |
| 68 | $2^2*17$ | 25 | $5^2$ |
| 152 | $2^3*19$ | 65 | $5*13$ |
| 3032 | $2^3*379$ | 1505 | $5*7*43$ |
| m= 8 | | | |
| m= 9 | | | |
| 46 | $2*23$ | 13 | 13 |
| 100 | $2^2*5^2$ | 31 | 31 |
| 220 | $2^2*5*11$ | 71 | 71 |

表 16: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 10 | | | |
| 11 | 11 | 0 | 0 |
| 17 | 17 | 6 | $2 * 3$ |
| 23 | 23 | 12 | $2^2 * 3$ |
| 29 | 29 | 18 | $2 * 3^2$ |
| 47 | 47 | 36 | $2^2 * 3^2$ |
| 59 | 59 | 48 | $2^4 * 3$ |
| 65 | $5 * 13$ | 38 | $2 * 19$ |
| 83 | 83 | 72 | $2^3 * 3^2$ |
| 107 | 107 | 96 | $2^5 * 3$ |
| 173 | 173 | 162 | $2 * 3^4$ |
| 227 | 227 | 216 | $2^3 * 3^3$ |
| 245 | $5 * 7^2$ | 158 | $2 * 79$ |
| 443 | 443 | 432 | $2^4 * 3^3$ |
| 587 | 587 | 576 | $2^6 * 3^2$ |
| 659 | 659 | 648 | $2^3 * 3^4$ |
| 707 | $7 * 101$ | 590 | $2 * 5 * 59$ |
| 983 | 983 | 972 | $2^2 * 3^5$ |
| 1163 | 1163 | 1152 | $2^7 * 3^2$ |
| 1307 | 1307 | 1296 | $2^4 * 3^4$ |
| 1505 | $5 * 7 * 43$ | 998 | $2 * 499$ |
| 2795 | $5 * 13 * 43$ | 2006 | $2 * 17 * 59$ |
| 2927 | 2927 | 2916 | $2^2 * 3^6$ |
| 3083 | 3083 | 3072 | $2^10 * 3$ |
| 3467 | 3467 | 3456 | $2^7 * 3^3$ |
| 5843 | 5843 | 5832 | $2^3 * 3^6$ |

表 17: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 11 | | | |
| m= 12 | | | |
| 13 | 13 | 0 | 0 |
| 19 | 19 | 6 | $2*3$ |
| 25 | $5^2$ | 8 | $2^3$ |
| 31 | 31 | 18 | $2*3^2$ |
| 37 | 37 | 24 | $2^3*3$ |
| 61 | 61 | 48 | $2^4*3$ |
| 67 | 67 | 54 | $2*3^3$ |
| 85 | $5*17$ | 52 | $2^2*13$ |
| 109 | 109 | 96 | $2^5*3$ |
| 157 | 157 | 144 | $2^4*3^2$ |
| 229 | 229 | 216 | $2^3*3^3$ |
| 265 | $5*53$ | 196 | $2^2*7^2$ |
| 337 | 337 | 324 | $2^2*3^4$ |
| 397 | 397 | 384 | $2^7*3$ |
| 499 | 499 | 486 | $2*3^5$ |
| 661 | 661 | 648 | $2^3*3^4$ |
| 877 | 877 | 864 | $2^5*3^3$ |
| 1471 | 1471 | 1458 | $2*3^6$ |
| 1549 | 1549 | 1536 | $2^9*3$ |
| 1741 | 1741 | 1728 | $2^6*3^3$ |
| 3469 | 3469 | 3456 | $2^7*3^3$ |
| 4621 | 4621 | 4608 | $2^9*3^2$ |
| 5197 | 5197 | 5184 | $2^6*3^4$ |
| 7789 | 7789 | 7776 | $2^5*3^5$ |
| 8761 | 8761 | 8748 | $2^2*3^7$ |

表 18: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 13 | | | |
| 62 | $2*31$ | 17 | 17 |
| 68 | $2^2*17$ | 19 | 19 |
| 98 | $2*7^2$ | 29 | 29 |
| 158 | $2*79$ | 65 | $5*13$ |
| 260 | $2^2*5*13$ | 83 | 83 |
| 518 | $2*7*37$ | 203 | $7*29$ |
| 1526 | $2*7*109$ | 635 | $5*127$ |
| 6020 | $2^2*5*7*43$ | 2003 | 2003 |
| m= 14 | | | |
| m= 15 | | | |
| 64 | $2^6$ | 17 | 17 |
| 352 | $2^5*11$ | 145 | $5*29$ |
| 4192 | $2^5*131$ | 2065 | $5*7*59$ |

表 19: オイラー型メルセンヌ超完全数

| $a$ | 素因数分解 | $A$ | 素因数分解 |
|---|---|---|---|
| m= 16 | | | |
| 17 | 17 | 0 | 0 |
| 23 | 23 | 6 | $2*3$ |
| 29 | 29 | 12 | $2^2*3$ |
| 41 | 41 | 24 | $2^3*3$ |
| 53 | 53 | 36 | $2^2*3^2$ |
| 65 | $5*13$ | 32 | $2^5$ |
| 71 | 71 | 54 | $2*3^3$ |
| 77 | $7*11$ | 44 | $2^2*11$ |
| 89 | 89 | 72 | $2^3*3^2$ |
| 113 | 113 | 96 | $2^5*3$ |
| 179 | 179 | 162 | $2*3^4$ |
| 233 | 233 | 216 | $2^3*3^3$ |
| 305 | $5*61$ | 224 | $2^5*7$ |
| 401 | 401 | 384 | $2^7*3$ |
| 449 | 449 | 432 | $2^4*3^3$ |
| 503 | 503 | 486 | $2*3^5$ |
| 593 | 593 | 576 | $2^6*3^2$ |
| 881 | 881 | 864 | $2^5*3^3$ |
| 1025 | $5^2*41$ | 784 | $2^4*7^2$ |
| 1553 | 1553 | 1536 | $2^9*3$ |
| 1937 | $13*149$ | 1760 | $2^5*5*11$ |
| 2609 | 2609 | 2592 | $2^5*3^4$ |
| 3089 | 3089 | 3072 | $2^10*3$ |
| 4391 | 4391 | 4374 | $2*3^7$ |
| 4625 | $5^3*37$ | 3584 | $2^9*7$ |
| 5777 | $53*109$ | 5600 | $2^5*5^2*7$ |
| 5849 | 5849 | 5832 | $2^3*3^6$ |
| 7793 | 7793 | 7776 | $2^5*3^5$ |