

数学において創造性を培うための コンピュータ利用の一例

飯高 茂

数学の研究にコンピュータは有用ですが、コンピュータを使えば数学研究が一挙に進むほど数学は甘くはありません。本稿ではリサージュ曲線とその変種の曲線を取りあげ、その探求過程を通して数学においてコンピュータを活用する1つのモデルを提示し、数学において創造性を培う例とします。

1 コンピュータと数学 数学研究の場にコンピュータが入るようになっては半世紀になろうとしています。数学が人類に意識されるようになってから5000年ほど経ったとすると、半世紀はその1%にしかありません。5000年といいきるの誇張しすぎの恐れがありますのでやや抑えて自覚的な数学の成立をユークリッドの『原論』におくことにすると、数学の歴史は2000年になります。その中での50年は短いとも言えますが、研究の密度、深度、幅の広がり近代に入ってから特に著しく、最近の50年間は過去の1950年分にも匹敵することでしょう。このように大ざっぱな推論をすると、ここ50年来のコンピュータの発達は数学にとって相当に大きい意味をもっている可能性があります。

コンピュータの発達が数学の研究にとって本質的な影響を与えているか、または与える可能性があるかどうか議論の分かれるところです。コンピュータは数学にとって本質的ではないという立場に私は賛成します。省みますと、私は数学の問題に取り組むとき「どんなに難しい数学の問題も自分なら解決できる、がんばろう」などと思ったことは一度もありませんでした。難しそうな諸問題が解ける枠組みを知ること、あるいは数理現象の背後にある数理的法則を知りたかっただけな

のです。難問の攻略をあきらめるかわり、より原理的なものを探り、数学的世界の真理にふれたいという気持ちが強かったのです。数学の本質はコンピュータで強く変わることはないでしょう。数学が扱うのは「真理」であるのに対してコンピュータは「現実世界のもの」で人間と同様不確実なものだからです。

2 リーマン面と種数の感動 例えば「リーマン面は種数によってその基本的性格が規定される」というようなことが数学における本質的な部分です。そこで種数についてまずふれます。種数という言葉に私が初めて接したのは高校生のときでした。教員研究室にあったソ連科学アカデミー『数学通論』という高級な数学通俗書を見てみるとリーマン面が美しく描かれており、「種数によってその本質が規定され位相的形が決まる」と書いてありました。その一言にひどく打たれたのです。なぜ感動したかは今となってはよく分からないことですが、

リーマン面は複素 1 次元だから最も簡単な場合です。「複素 n 次元である一般の解析多様体についても種数のように簡単でかつ本質を規定するほど強力な不変量があるだろうか」そのような疑問が私の中に芽生え大きくなっていきました。その疑問は 1970 年に至って解決できました。キーは小平次元の概念です。

3 小平先生と電卓 小平邦彦博士は数学の歴史の中においても第 1 級の数学者であることは言うまでもありません。1968 年に先生はアメリカから帰国し日本の後進の指導に当たられるようになりました。おかげで私はお菓子をご馳走になりながら小平先生の話を伺うという至福の中で毎日をすごすことになったのです。話題は数学に限らなかったのですが、私にとって意外に感じられたことの 1 つに先生の数学観があります。「コロンブスがインドを発見する積もりで船出し、ついにアメリカ大陸を発見してしまったように、研究の結果全く予想外の新しい発見を数学でしてみたい」と言われました。さらに、それに加えて「良い定理（問題）というのは一言でいえるものです。条件をゴタゴタ言わなくても意味がすぐ分かるのが良い定理（問題）です」と言われたました。なるほどこれも簡単で良い表現です。

先生は数学が全く理解できない人がいることにある日気づき愕然と

されたそうです．その結果「数学が分かるには**数覚**がなくてはならない」という結論に至りました．数覚はエーテルのようなもので存在証明はできないが、現実には数覚が無くて困っている人はどこにでもいるので、確かにあるとのことでした．

小平先生は晩年になって、HP社の高性能関数電卓を購入して大いに楽しみました．初期の電卓なのでプログラムもできないし、公式を記憶させることすらできません．しかし「大きな数の計算が気軽にできて実に面白い」と言われ最後まで愛用されました．お宅にはHP社の電卓がバージョンアップの数だけおいてありましたから、熱心に新機能を追求されたことでしょう．しかし、学校教育で電卓を使うことには先生は断固反対されました．「電卓では数覚の訓練ができない」という理由です．

コンピュータを使うと数学の実験ができ、数学をビジュアルに見ることができます．これが数学、とくに数学教育においてコンピュータを使う利点です．ワープロを使うとペンで漢字を書くのが億劫になるが結果的には多くの漢字を使うことができるようになります．実際、ワープロでなければ「億劫」という字を書くことすら面倒でできません．同様に、電卓・コンピュータに親しむと筆算の力は落ちますが、計算を活用する機会は飛躍的に増大します．筆算は下手になっても計算はするので数覚が鋭くなることもありえます．

4 三角関数で表された曲線 コンピュータを気軽に使い数学の大洋に漕ぎだして、アメリカ大陸とは言わないまでも、未知の小さな島のようなものをいくつか見つけたいものです．平成元年版の学習指導要領では数学Cでいろいろな曲線を学習することとしています．そこでは $x = \sin 2\theta, y = \sin 3\theta$ と媒介変数表示される曲線が美しい曲線の例としてあげられています．しかし、これが美しい曲線だと言われてもどこが美しいかはよくわかりません．そこで、コンピュータを用いてこの曲線を詳しく探求し、その美しさを発見することにします．

$x = \cos n\theta, y = \cos m\theta$ で表された曲線のグラフをいろいろな n, m についてを観察し実次数（直線を引きそれと曲線の最大交点数．

次数というときは複素数で考えますが、ここでは目で見て数えているだけから実数しか扱えません。ここに、テクノロジーの限界が表れます)と実2重点の数を調べましょう。次数の方は簡単で、 n, m の大きい方が次数です。

実2重点の個数の方は難しそうですがグラフを観察すると n, m のどちらかが1なら個数は0です。これは実2重点の数の公式があればそれは $(n-1)(m-1)$ を因数にもつことを示唆しています。そこであらかじめ $(n-1)(m-1)$ を計算しておき、目で見える実2重点の数を調べて比べてみると丁度その半分、すなわち $(n-1)(m-1)/2$ が実2重点の数となることが分かります。

$n=1, m=2$ のときのグラフは放物線ですが、その一部しか表示できません。この場合は余弦の倍角公式を用いると $y=2x^2-1$ をええます。一般の場合は余弦の n 倍角公式の式を用いると n, m 次の多項式で媒介変数表示できることがわかります。ここで使われるのがチェビシェフ多項式で $T_n(t)$ と書かれます。それは n 次式で $\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ を満たすので $x=T_n(t), y=T_m(t)$ と媒介変数表示される曲線が余弦関数を用いた曲線を自然に延長したものになります。この形で表した場合には、さらに2重点が見えてくるのでしょうか？

答：2重点はもう無い。

しかし無限遠点では特異点が出てくるので、無限遠点での様子は別に調べないといけません。

グラフを詳しく観察した結果、数学の公式を見いだせます。しかし、公式の意味を考えるには理論的考察が欠かせません。グラフを単に見るだけでは何も見えきません。たとえば、無限遠点での曲線の挙動をみるような理論的考察はとても大切です。そのためには余弦関数から離れチェビシェフ多項式を使う必要があります。

曲線 $x=\sin 2\theta, y=\sin 3\theta$ はリサージュ図形の特別な場合です。リ

リサージュ図形の定義にはいろいろありますが、平凡社の世界百科大事典では $x = \cos(n\theta), y = \cos(m\theta + \alpha)$ で定義された曲線，としています．余弦の代わりに正弦を使っても変わりはありません．定数 α の選び方でいろいろな曲線がでできます．このとき次数は m または $2m$ です．ただし、 $n < m$ としています．この曲線はフランスの物理学者リサージュによって19世紀に注目され，コンピュータ時代になった現代，多くの場で描かれるようになりました．windowsのスクリーンセーバにもなっているほどです．

5 T曲線 さて正弦、余弦関数ではなく正接関数を用いたらどんな曲線ができるでしょうか．この問題は難しく，鉛筆と紙だけでは手のつけようがありません．リサージュ図形のときのように物理モデルがあるわけでもないのです．コンピュータに $x = \tan n\theta, y = \tan m\theta$ と媒介変数表示される曲線（T曲線ということにする）を描かせてみましょう．その結果が図3,4にあります．これらを描くにあたって私は白石和夫先生作の「（仮称）十進BASIC」を用いてプログラムを自作しました．このようなときのプログラミングのポイントの1つは無限大になるときの処理です．「十進BASIC」では例外処理ができるので，簡単に無限大の処理ができて，特異点での様子をうまく描けるのです．高名な数式処理ソフトMaple や Mathematica ではこのように激しく動くグラフをうまく描くことは難しいようです．国産の数式処理ソフトRISA-ASIRでは曲線がずっとうまく描けますが，三角関数が扱えません．

T曲線のグラフいろいろな n, m についてを眺めて見ると、驚いたことに2重点は1つもなくその代わり交差のない高速道路のような曲線の分枝が多数見えます．T曲線は有理関数で媒介変数表示できますからいわゆる有理曲線で、その種数は0になります．ですからこれは本質的に簡単な曲線です．そこで多くの曲線について観察した結果

実次数は n, m がともに奇数なら $n + m - 1$,

どちらかが偶数なら $n + m$

となることがわかりました。T 曲線は無限に広がるのでどの範囲まで表示させて次数を数えるかが問題になります。たとえば $n=4, m=5$ の場合はうっかりすると 8 本しか曲線が見えませんが実は 9 本も枝があります。グラフをうまく描かないと、次数の予想すら誤ってしまいます。無限遠点での考察のために射影座標を導入し、それを次のようにアフィン化します：

$$u = 1/x, v = y/x, z = 1/y, w = x/y$$

そこで (u, v) 座標や (z, w) 座標で曲線を表示して、コンピュータに図を描かせると無限遠点からみた曲線が見えてきます（図 4）。 r 本の曲線の分枝が異なった傾きをもって 1 点を通るとき、 r 重の**通常型特異点**といいます。T 曲線は (z, w) 座標と (u, v) 座標でみた場合に高々 1 つずつ通常型特異点を持つのです。その重複度を調べると次のような表ができます。

図 1 (z, w) 座標の原点 P での T 曲線の重複度

$n \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	4	4	6	6	7
2		3		5		7	
3	3		4	4		6	8

また次の表もできます。

図2 (u, v) 座標の原点QでのT曲線の重複度

$n \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8
1							
2		2		2		2	2
3	2		3	2		2	3

グラフの観察から、 $n < m$ とすると、Pでの重複度は $n + m$ が偶数なら $m - 1$ 、奇数なら m 、Qでの重複度は $n + m$ が偶数なら $n - 1$ 、奇数なら n となることが分かります。このことは次数を変えてグラフを観察すれば確認できることでしょう。

同様にT曲線の実次数は $n + m$ の偶奇でわかれ $n + m$ が偶数なら $n + m - 1$ 、 $n + m$ が奇数なら $n + m$ となります。そこで、正接のn倍角公式に注目すると、ここで推察できた実次数が実は次数にひとしいことが簡単な計算から分かります。次数がdの曲線の仮想種数は $(d - 1)(d - 2)/2$ です。T曲線は有理関数であって、仮想種数は特異点Pでの寄与 $\delta(P)$ を合わせればすべて求められます。ところでPがr重通常型特異点Pなら $\delta(P) = r(r - 1)/2$ となることが知られています。

$n + m$ が偶数なら $d = n + m - 1$ なので仮想種数から $\delta(P) + \delta(Q)$ を差し引いた結果、

$$\frac{(d - 1)(d - 2)}{2} - \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \frac{(m - 1)(m - 2)}{2} = (n - 1)(m - 1)$$

$n + m$ が奇数の場合も計算すると $d = n + m$ なので仮想種数から $\delta(P) + \delta(Q)$ を差し引いた量は

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = (n-1)(m-1)$$

となります．驚いたことに同じ式が出てきのですた．しかもC曲線の時の実2重点の数の倍と同じです．このことは $n, m > 1$ ならT曲線にはまだ特異点があることを意味します．

正接関数の n 倍公式を作りながら、三角関数を帰納的に計算すると2つの虚の (n, m) 型の尖点 R があることがわかります．尖点 R の場合 $\delta(R) = (n-1)(m-1)/2$ を満たしますが、これらは虚の特異点だからグラフには見えません．しかし、正接関数の代わりに双曲正接関数 $\tanh(t)$ を用いて曲線を描かせるとこの場合は無限遠点の通常型特異点が虚になり、視界からは消えてしまうが、2つの尖点は実になって、この世に現われ、くっきりと見えます．このような面白さは格別でコンピュータを用いたおかげで味わえるものです．

さて最後にあたり読者に課題を出します．

$x = \sec n\theta, y = \sec m\theta$ で表示される曲線のグラフを研究すること．

ここでは無限遠点がおもしろい特異点である上、実2重点をもいくつか持っています．これらが不思議なまでに調和し、美しい数理の世界を作っているのです．（参考文献参照）

参考文献

飯高茂 平面曲線の幾何 共立書店 2001年

筆者の略歴

（現）学習院大学理学部教授

付録

図 3 $n=5, m=3$ のときのT曲線

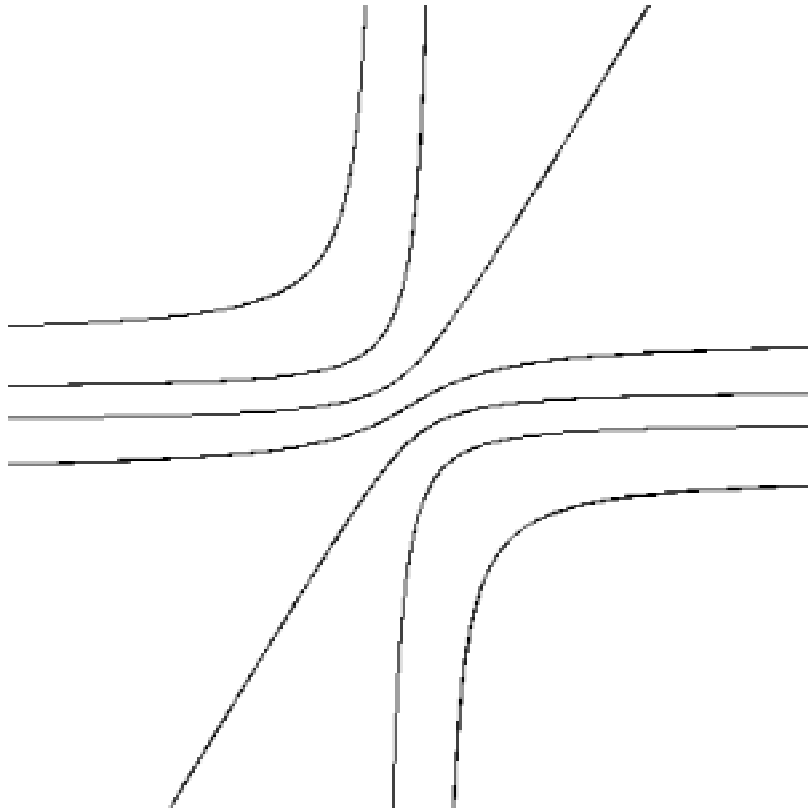


図 4 $n=5, m=3$ のときのT曲線を (u, v) 座標で描く

