放送大学多摩数学クラブ発表

特殊相対性理論の運動学——アインシュタイン原論文の邦訳を読み解く——

2019 年 2 月 13 日水曜日
畔上耕介

簡単に自己紹介させていただきます。私は 1973 年の生まれで、18 歳のとき私立武蔵高校を卒業して東京大学理科 I 類に入学しましたが、数学や自然科学などの授業がちっとも分からず、数学科や物理学科に進学することは諦めて新たに興味を感じ始めていた哲学や言語学を学ぶべく教養学科第一科学史及び科学哲学分科という所に進学しました。しかしそこで要求された高度な語学力が身についていなかったために再び挫折し、心の病気になって休学や留年を重ねて都合 7 年間大学に在籍してやっと卒業証書を手にしました。卒業論文は「言語学の革命？——認知言語学と客観主義との攻防の現状——」という表題で書きました。その後ちゃんと就職することはできず通信講座で翻訳の勉強をしたり東京言語研究所で言語学と数学基礎論の重なる部分に関する勉強をしたりして過ごし、現在はスコット・フィリップスという人の書いた言語とコミュニケーションの起原に関する本を訳するチームに加えてもらっています。2018 年には放送大学に入学して数学や自然科学の勉強を中心にやり直しており、多摩数学クラブに所属して 6 月には「ゲーデルのプラトニズムに基づくよりエレガントな数学の書き方」という表題で発表させていただきました。また、2003 年、29 歳で入院したときに統合失調症・アスペルガー症候群という診断をもらい、2018 年 2 月にはこまば当事者研究会という所で「心の背骨仮説について」という人間の心の構造について障害当事者の立場から立てた新説に関する発表を行わせてもらいました。今後は翻訳の仕事の範囲を広げながら各方面の基礎的な勉強を地道に積み重ねていきたいと思っています。

放送大学の授業「初歩からの物理」で相対論に触れて興味を持ちましたので、今日の発表では、アインシュタインが 26 歳のとき、1905 年に相対性理論を最初に発表した論文、「動いている物体の電気力学」（*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*）を内山龍雄が翻訳した岩波文庫の『相対性理論』のうち、運動学に関する部分を丁寧に読み解いていくことにします。以下の本文はその論文の要約ないし引用（漢字表記と段落の分け方だけ一部変えています）に解説を加えたものになります（内山による解説もありますが今回は参照しません）。続く電磁気学に関する部分も重要なのですが、今の私の力ではそこまでは理解が及びません。それでも「これが相対性理論か！」と思えるくらいのかなりの感動を味わうことができます。ちょっと背伸びしている高校生になったつもりでお聞き下さい。

その後アインシュタインはこの第一論文を補完する数編の論文を発表し、それらの内容をまとめて今日では特殊相対性理論と呼んでいます。等速度運動に関する相対性理論です。さらに 10 年後には、加速度（重力）の関わってくる現象も対象とする理論をアインシュタインは発表し、それを今日では一般相対性理論と呼んでいます。

0. 序文

以下、本文をやや縮めるくらいに要約していきます。

動いている物体の関与する電磁現象を、マックスウェルの電気力学で説明するとき、例えば、ある二つの現象が本質的には同じと考えられるにも関わらず、その説明に大きな違いの生ずる場合がある。例として、一個の磁石と、一個の電気の導体との間の相互作用について考えてみよう。導体内には電流が発生する。この現象は導体の磁石に対する相対的運動だけによることが分かっている。ところが電気力学によれば、磁石と導体のうちの一方が静止しており他が動いている場合と、逆の場合とでは、電流発生に対する説明は全く異なったものとなる。今磁石は動いており、導体は静止しているとすれば、磁石の周囲には、あるエネルギーを持った電場が発生し、導体内の各点において、この電場は、それぞれそこに電流を生み出す。これとは逆に、磁石は静止し、導体が動いているときは、磁石の周囲には電場は発生しない。しかし導体の内部には、電気の流れを引き起こす起電力が生まれる。この起電力自身には、他にエネルギーを与えるという能力はないが、導体内に電流を発生させる。もしこれら二つの例で、導体の磁石に対する相対的運動が同じであると仮定するならば、始めの例で二次的に発生した電場の生み出す電流と、第二の例で起電力が生み出す電流とは、その量においても、流れの向きについても、全く同じである。

上述の話と同じようないくつかの例や、“光を伝える媒質”に対する地球の相対速度を確かめようとして失敗に終わったいくつかの実験をあわせ考えるとき、力学ばかりでなく電気力学においても、絶対静止という概念に対応するような現象は全く存在しないという推論に到達する。いやむしろ次のような推論に導かれる。どんな座標系でも、それを基準にとったとき、ニュートンの力学の方程式が成り立つ場合〔現在で言う慣性系〕そのような座標系のどれから眺めても、電気力学の法則及び光学の法則は全く同じであるという推論である。この推論は一次の程度の正確さで、既に実験的にも証明されている。そこでこの推論（その内容をこれから“相対性原理”と呼ぶことにする）をさらに一歩推し進め、物理学の前提として取り上げよう。またこれと一見、矛盾しているように見える次の前提も導入しよう。すなわち、光は真空中を、光源の運動状態に無関係な、一つの定まった速さ c を以て伝播する主張である。静止している物体に対するマックスウェルの電気力学の理論を出発点とし、運動している物体に対する、簡単で矛盾のない電気力学に到達するためには、これら二つの前提だけで十分である。ここに、これから展開される新しい考え方によれば、特別な性質を与えられた“絶対静止空間”というようなものは物理学には不要であり、また電磁現象が起きている真空の空間の中の各点について、それらの点の“絶対静止空間”に対する速度ベクトルがどのようなものかを考えることも無意味なことになる。このような理由から、“光エーテル”という概念を物理学に持ち込む必要のないことが理解されよう。

ここで、「“光を伝える媒質”に対する地球の相対速度を確かめようとして失敗に終わったいくつかの実験」の例として、有名なマイケルソン・モーリーの実験の説明を岸根順一郎・米谷民明（2016）『初歩からの物理』放送大学教育振興会から引用して紹介しておき

ます。

19 世紀、電場や磁場は宇宙に充満しているある種の物質（古代ギリシャに由来する「エーテル」という名で呼ばれた）の性質であると考えられていました。（中略）

電磁場の不思議のうち、特に目立つのは、真空中の電磁波の速度が、一定値$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$だということです。この速度は誰にとっての速度なのでしょうか。普通、速度は何か一つの基準に対して相対的にのみ意味があります。たとえば、2 機の飛行機が平行して運行しているときの相対速度はゼロ、逆方向なら地面に対する速度の 2 倍です。光速度は私たちが直接感知できる速度に比べればはるかに速いですが、有限ならば高速で光を追いかけたり遠ざかったりすれば、光速度は減ったり増えたりすると思えます。また、地面という定まった基準をもとに速度を定義すればよいと思う人も多いでしょう。しかし、地球は自転・公転をしているし、太陽系も銀河系の中で運動している、銀河系だって宇宙の中で運動しているので、地面を特別な基準として採用するわけには行きません。エーテルが実在するなら、定数速度cは、静止したエーテル中を光が伝播する速度とするのは納得できることです。その場合、地球表面はこのエーテルに対して運動しているはずですから、光の速度を精密に測定すれば、方向によって速度が違うべきです。空気中を伝わる音波と同じように、観測者の運動に依存して速度が異なるはずだからです。

（中略）エーテルの実在を確かめようとする精密な実験が、1880 年代にマイケルソンとモーリーによって行われました（図）。光線を半分反射する鏡で二つに分け、直交する方向に伝播させた後、再び重ね合わせて干渉させて 2 方向の光の伝播速度の違いを検出するように工夫したのです。しかし、光速度が方向によらず一定で、地球の公転・自転速度から予想される時間のずれは存在しないという結果が得られました。

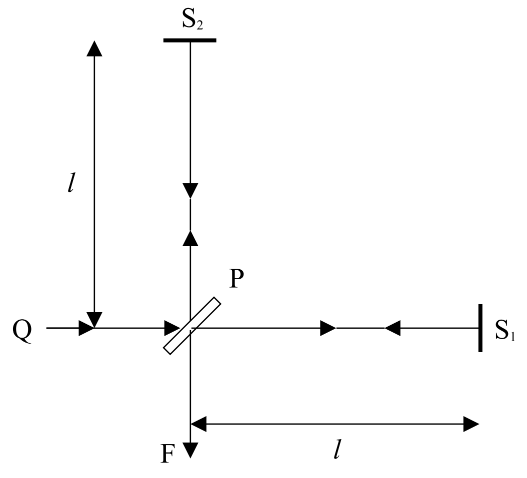


図　マイケルソン - モーリーの実験　光をQから発射し、Pで二つに分け、S_1、S_2で反射させ、再びPを通して重ね合わせる。Pから反射板までの距離は、どちらも同じ l とする。もし、二つの方向で光速度が違うと、Pに帰ってくる到着時間が二つの光線で異なり、波の位相がずれて生じる干渉縞の観察から速度の違いを読み取れる。

――岸根・米谷（2016: 228-229）

光の縦の速さと横の速さが等しいという実験結果が出たことは、地球が宇宙の中で静止しているという奇妙な結論と整合するように見えますが、そんな立場を取らなくても、絶対に静止している空間なるものが存在せず、どんな慣性系から見ても電気力学及び光学の法則は同じであるという相対性原理と、光速が光源の運動状態によらず一定であるという光速度不変の原理の両方を取ることで矛盾なく理解できるのです。

原論文に戻ります。

これから展開される理論では――他のどんな電気力学でもするように――剛体の運動学をその基礎とする。なぜならば、どのような理論でも、そこに述べられることは、剛体（座標系）及び時計と電磁的過程との間の関係に関する主張であるからである。動いている物体の電気力学を考究しようとするとき、我々が直面するいろいろの困難はすべて、上に述べたような事柄に対して、今までに、十分な考察をしなかったことがその原因である。

I.　運動学の部

§1.　同時刻の定義

以下、しばらく要約します。

ニュートン力学の方程式が成り立つ座標系を"静止系"と呼ぶ。

一つの質点がこの座標系に対して静止しているとする。座標系に対する質点の位置は、剛体でできた物差しを用いて、ユークリッド幾何学の方法で決定され、直交座標で表される。質点の**運動**を書き表すには、質点の座標の値を時間の関数として表現すればよい。→時間とは何かを明確にしなくてはならない。時間が役割を担う判断はすべて、**いくつかの出来事が同時刻に起きたか否か**に対する判断である。

・"あの列車は7時にここに到着する"←"私の時計の短針が7を指すということと、列車の到着とは同時刻に起きる出来事である"の意。

時間：私の時計の短針の位置。

↑

時計から離れた場所に起きた事件の発生時刻の数値には使えない。

・ある場所で事件が起きたとする。事件の発生と同時に、その場所から、座標系の原点にいる観測者に向かって、事件の発生を知らせる光の信号を発射する。この光が真空を通って観測者に届いた瞬間に観測者の持っている時計の針が示す数値をもってその事件の起きた時刻に定める。

↑

時計を持った観測者のいる場所を変更すれば、それに応じて各々の事件に付与された数値の示す時間的順序も違ったものになる、という欠点がある。

・より現実的な時間の決め方：

空間内の離れた二点 A, B があり、それぞれに時計があるとする。A で起きた事件の時刻と B で起きた事件の時刻をそれぞれ測れる。“A 時間”と“B 時間”が定まる。

A, B に共通な時間は次のように決める。「光が A から B に到達するのに要する“時間”は、B から A に立ち戻るのに必要な“時間”に等しい」という要請を**定義**として前提に置く。

光が“A 時間”のt_Aという瞬間に A を出発して B に向かい、

“B 時間”のt_Bという瞬間に B で反射され、

“A 時間”のt'_Aという瞬間に A に立ち戻ったとするとき、

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

が成り立つなら、二つの時計は合っている（等しい時間を表している）。と定義する。

さらに次が成り立つと仮定する。

1. もし、B の時計が、A にある時計と合っていれば、逆に A の時計は、B の時計と合っている。
2. A の時計が、B にある時計ばかりでなく、さらに C にある時計とも合っているならば、B, C にある時計は互いに合っている。

これで“同時刻”、“時間”の定義は明確にできた。

経験〔マイケルソン・モーリーの実験の結果など〕に従って、$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = c$という量（真空中の光の速さ）が一つの普遍定数であると仮定する。静止系に静止している時計とそれに合わされた時計の示す時間を“静止系の時間”と呼ぶことにする。

§2. 長さと時間の相対性

以下の議論は次の二原理を基礎に置く。

1. 相対性原理

   互いに他に対して一様な並進運動をしている、任意の二つの座標系のうちで、いずれを基準にとって、物理系の状態の変化に関する法則を書き表そうとも、そこに導かれる法則は、座標系の選び方に無関係である。

2. 光速度不変の原理

   一つの静止系を基準にとった場合、いかなる光線も、それが静止している物体、あるいは運動している物体のいずれから放射されたかには関係なく、常に一定の速さcを以て伝播する。ここで光の速さとは、

$$\text{速さ}=\frac{\text{光の進んだ距離}}{\text{伝播に要した時間}}$$

によって定義される。この定義で、“伝播に要した時間”の意味は、§1の定義に従う。

以下は、原論文の引用になります。

さて、一本の剛体の棒が静かに置かれているとする。これを、同じく静止している物差しを用いて測ったとき、その長さがlとする。

次にこの棒が動いている場合を考えよう。今棒の軸は静止系の X 軸に平行とする。この棒が X 軸に沿い、軸上の点の位置を示す値xが増加する方向に向かって、速さvで一様な並進運動をしているとする。

そこでこれから、動いている棒の長さを問題として取り上げよう。この長さについては、次のような二つの異なる操作によって、それぞれ異なる定義が考えられる：

a) 観測者と、上に述べた物差しが一体となって、長さを測ろうとしている問題の棒と一緒に動いているとする。この方法では、棒、観測者及び物差しの三者がすべて静止している場合と全く同じように、物差しを直接、棒の上にあてがうことによって、棒の長さを測ることができる。

b) 静止系に静座している観測者が、§1 の定義に従って互いに同一の時間を示すように調整された（静止系のいろいろの場所に固定されている）多数の時計の助けを借りて、それらが示すある一つの定まった時刻tに、動いている棒の両端が、それぞれ静止系の中のどの点に合致するかを、まず見定める。このようにして見つかった二点の間の距離を、既に述べたような物差し（ただしこの場合には静止系に静止している物差し）を用いて測定した結果も、また同じ様に“棒の長さ”と呼ぶことのできるものである。

相対性原理によれば、操作 a) によって求められた長さ（これを“棒の伴走系から見た、その長さ”と名付けよう）は静止している物差しの長さlに等しいはずである。

一方、操作 b) によって求められた長さ（これを“静止系に対して動いている棒の長さ”と呼ぼう）がいくらになるか、我々は二つの原理を用いてこれを求めてみよう。なおそれがlとは異なった値となることが分かるであろう。

従来、用いられている運動学では、上述の二つの操作によって決定される長さは、互いに完全に等しいということが、暗黙のうちに仮定されていた。換言すれば、動いている剛体の、ある瞬間tにおける形は、それが**静止**している場合の姿と幾何学的に全く**同一**であるということが仮定されていた。

ここでさらに、棒の両端〔先頭が B、後端が A〕にそれぞれ一個の時計を取り付けたとしよう。これらの時計はいずれも〔静止系のある一つの瞬間において〕静止系に置かれた時計と合わせてあるとする。もっと厳密に言えば、A 及び B に取り付けた時計の示す時間は〔静止系から見ると〕、常にそれらの目の前にある静止系に置かれた時計の示す“静止系の時間”に対応するように調整されているものとする。それ故これら二つの時計は静止系から見たとき互いに合っている。

ここでさらに、A, B それぞれの時計のそばに、これらの時計と一緒に走っている観測者が一人ずついるとする。今、この二人の観測者が、§1 に確立した、時計の合っているか否かを調べるための判定法を、これら二個の時計に適用したとしよう。まず、時刻t_Aに [1]A から光線が発射され、時刻t_Bに、点 B で反射され、時刻t'_Aに、この光線は A に立ち戻ったとする。

光速度不変の原理を用いれば、次の関係が成立する〔これは静止系から見た場合の関係式である〕：

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}$$

及び

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}$$

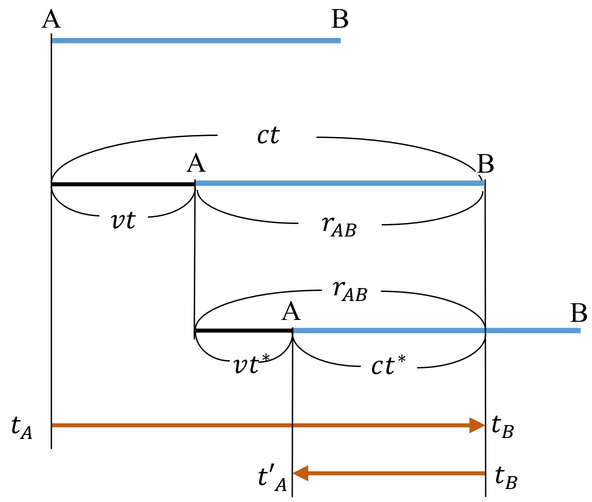
ここでr_{AB}は、走っている棒を静止系から眺めた場合の長さを意味する。上の関係式を見ると、棒と一緒に走っている観測者から見るとき、A, B 二つの時計は合っていない。一方、静止系に静座している観測者から見れば、両方の時計が同時刻を示していることは、既に述べた通りである。

∵　ここで式の中にcではなく$c - v$とか$c + v$とかいった項が出てくることが、光速度不変の原理に反するのではないかという疑問が湧きます。静止系から見ると行きの光速度は$c - v$、帰りの光速度は$c + v$になるというのでしょうか？

違います。

行き（$t = t_B - t_A$秒後）

帰り（さらに$t^* = t'_A - t_B$秒後）



行き（光が進む棒に乗っているとき）も帰り（光が進む棒に反対向きに乗っているとき）も光速が変わらずcであることに注意しましょう（これが光速度不変の原理）。

[1] ここで“時刻”とは、“静止系の時間”を用いた時刻である。それは、また同時に、“走っている時計（それが今問題にしている場所にちょうど、来合わせた瞬間に、その時計）の針の示す数値に**対応**する。”

図に従って棒の長さr_{AB}を 2 通りの仕方で計算してみると、

$$r_{AB} = ct - vt = (c - v)t = (c - v)(t_B - t_A)$$
$$r_{AB} = ct^* + vt^* = (c + v)t^* = (c + v)(t'_A - t_B)$$

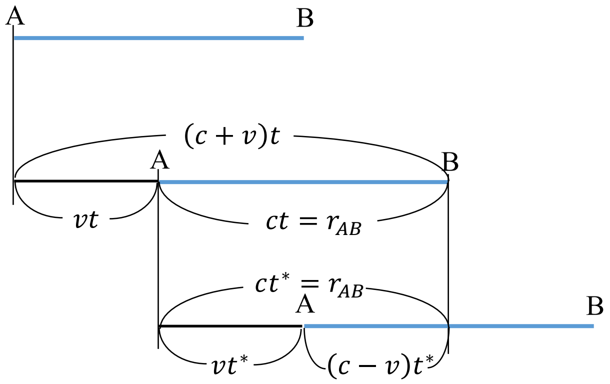
よって、

$$t = t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}$$

$$t^* = t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}$$

行きにかかる時間と帰りにかかる時間が異なる値になりました。

☆ここで、比較のために、同じ現象を古典力学に基づいて考えた場合計算結果がどうなるかも見ておきましょう。



行き（$t = t_B - t_A$秒後）

帰り（さらに$t^* = t'_A - t_B$秒後）

行き（光が進む棒に乗っているとき）は光速が$c + v$になり、帰り（光が進む棒に反対向きに乗っているとき）は光速が$c - v$になります。

$$r_{AB} + vt = ct + vt = (c + v)t$$
$$r_{AB} - vt^* = ct^* - vt^* = (c - v)t^*$$

よって、

$$t = t_B - t_A = \frac{r_{AB} + vt}{c + v} = \frac{ct + vt}{c + v} = \frac{ct}{c} = \frac{r_{AB}}{c}$$

$$t^* = t'_A - t_B = \frac{r_{AB} - vt^*}{c - v} = \frac{ct^* - vt^*}{c - v} = \frac{ct^*}{c} = \frac{r_{AB}}{c} = t = t_B - t_A$$

となって、行きにかかる時間と帰りにかかる時間は等しくなります。

相対性理論では時間の概念の定め方が古典力学とは異なるものになる理由が、ここに現れています。

□

なお、廣松渉（1986）『相対性理論の哲学』勁草書房に似たような現象についての厳密な解説が次のように行われています。図解は省略しますが、科学哲学者による科学の解説

は信用できないなどというのは誤解だと分かっていただけるのではないでしょうか。

> 今、等速直線運動をしている電車があって、その中央から光が発射されたものとする。車中の観測者にとっては、中央から発した光は前壁と後壁とに同時に到着する。地上の観測者にとってはどうか？ 「光速度一定の原理」を前提とするかぎり、光はまず後壁に到達し、そのあとで前壁に到達する。つまり、車中の観測者にとっては同時的事件であるものが地上の観測者にとっては異時の出来事になる！——何故そうなるか若干の説明を加えておこう。地上から観測するとき、光の進行に対して前壁は逃げて行き、後壁は迫って来るので、衝突までに光の進行すべき距離は、前壁までのほうが長い、ここまでは確かである。ところで、旧来の理論では光の速度は電車の速度と加減されるものと思念されていたので、前壁は逃げるとはいえより速いスピードで光が追いつき、後壁は迫って来るとはいえより遅いスピードで出会うため、結果的には、前後壁への到達が同時になるものと見做されたのであった。しかるに、「光速度一定の原理」が導入されるとき、光の速度と電車とはもはや加減されない。（翻って車中の人にとっては、中央から前壁までと後壁までとの距離は同じであり光速も同じ（一定）であるから所要時間も同じになる）この故に、上述のごとき帰結を生ずるのである。
>
> ——廣松（1986: 39）

本文に戻ります。

そこで、同時刻という概念に、**絶対的な**意味を与えてはならないことが分かる。すなわち、ある座標系から見たとき、二つの事件が同時刻であるとしても、この座標系に対して動いている他の座標系から見れば、それらの事件を互いに同時刻に起きたものと見なすわけにはいかないということが分かる。

§3. 静止系から、これに対して一様な並進運動をしている座標系への座標および時間の変換理論

“静止している”空間の中に二つの座標系があるとしよう。ここで座標系とは、どちらも、それぞれ一点から突き出した、互いに直交する三本の剛体製の棒からできていると考える。X 軸は一致しているとする。また両系の Y 軸、並びに Z 軸は、それぞれ相手の対応する軸に平行とする。それぞれの系には、一個の剛体の物差しと多数の時計が備え付けてあるとする。両系の物差し、及びすべての時計はそれぞれ、厳密に同じ性能のものとする。

さて両系のうちの一方の座標系（k）の原点が、他の静止している系（K）の X 軸の正の向き（x 座標の増加する方向）に、K に対して一定の速さ v をもって走っているとする。k 系の座標軸や、それに設置された物差し、及び時計も、同じように速さ v で走っている。静止系 K の任意の時刻 t には、運動系の座標軸のある決まった位置が対応する。その際、対称性を根拠に次のことを仮定してよい。すなわち、

いかなる時刻 t（”t”は常に“静止系の時間”を表すものとする）においても、運動系 k の

座標軸が常に、静止系 K の対応する座標軸に、それぞれ平行となるように、運動系の運動を特定することができるということである。

さて、静止系を基準に取り、それに対して静止している物差しを用いて、空間の各点の位置を測定し、得られた座標値を x, y, z とする。全く同じように、運動系を基準として、それと一緒に運動している物差しを用いて求められた、点の座標値をξ, η, ζとする。

さらに静止系に静止している時計を用い、光の信号を使って、§1 に与えられた方法に従い、時計が配置されている静止系のすべての点に対して“静止系の時間” t が規定されているとする。

これと全く同じように、運動系 k においても、時計の設置されているすべての場所に対して、“運動系の時間” τが規定されているとする。τの決定には、運動系の時計と設置されているすべての点同士の間に、§1 で述べたように、光の信号をやりとりするという方法を用いることはもちろんである。

一つの事件を静止系から眺めたとき、それの起きた場所と時刻を完全に規定する一組の数値を x, y, z, t とする。一つの組 x, y, z, t には、同じ事件を運動系 k から眺めた場合の〔それの場所と時刻を示す〕数値の組ξ, η, ζ, τが対応する。これら二つの数値の組を結び付ける関係式を発見するということが、ここの課題である。

まず第一に、空間及び時間が持っているものと考えられる一様性のために、求める関係式は一次式でなければならないということは明白といえよう。

今、$x-vt$をx'と書くことにすれば、k 系に静止している任意の点は、x', y, zという三個の数値の組によってその位置が規定される。k 系に静止している物については、これらは時間の経過に関係なく一定である。

ところで、まずτをx', y, z及びtの関数として表わしてみよう。そのためには、§1 に与えられた時計の合わせ方の規則に従って、同一の時刻を示すように調整された k 系（に固定されているすべて）の時計の示す時間そのものがτであるということを、数式を用いて書き表せばよい。

今 k 系の原点から k 系の時刻τ_0に、k 系の X 軸〔Ξ（グザイ）軸というほうが適切〕に沿って、その軸上に固定された一点に向かい光が発射されたとする。光がこの固定点に到達、同時に反射された時刻をτ_1、さらに反射光が、再び k 系の原点に立ち戻った時刻をτ_2とする。なお k 系の原点と、そのΞ軸上にある、上に述べた固定点との間の距離を K 系から見た数値を x'〔＝定数l'〕とする。k 系に固定された時計の示す時刻τはすべて、k 系から見たとき同時刻となるように調整されているから

$$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1 \cdots\cdots (1)$$

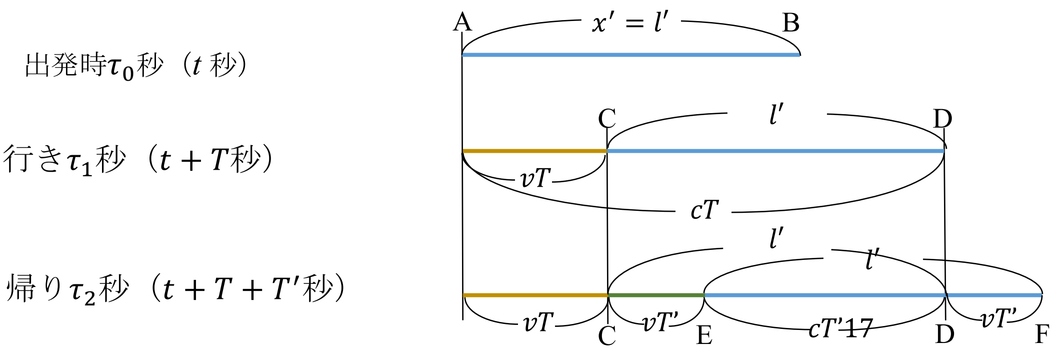
が成立するはずである。

静止系 K で、光速度不変の原理を用い、また独立変数x', y, z, tを用いてτを$\tau(x', y, z, t)$

の形に書くと、上の関係は次のようになる：

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{l'}{c-v}+\frac{l'}{c+v}\right)\right\}=\tau\left(l',0,0,t+\frac{l'}{c-v}\right)$$

∵　これは、先ほどの式の各項に静止系での各数値を書き入れたものです。



出発の時刻が静止系で t 秒だとして、それから T 秒後に光が固定点に到達します。それまでに光は A から D まで進みますが、その際の速さは光速度不変の原理に従って c のままです。運動系 k は速さ v で進んでいます。よって、AD－AC＝CD から

$$cT-vT=l'$$

$$T=\frac{l'}{c-v}$$

となり、運動系の時刻τ_1秒に対応する静止系の時刻を$t(\tau_1)$秒と書けば、

$$t(\tau_1)=t+T=t+\frac{l\prime}{c-v}\quad\cdots\cdots(2)$$

静止系で見て光が D で反射されてT''秒後に E まで戻ってきたとすれば、CD＝CE+ED から、

$$l'=vT'+cT'$$

$$T'=\frac{l'}{c+v}$$

運動系の時刻τ_2秒に対応する静止系の時刻を$t(\tau_2)$秒と書けば、

$$t(\tau_2)=t+T+T'=t+\frac{l\prime}{c-v}+\frac{l\prime}{c+v}\quad\cdots\cdots(3)$$

(1)に(2)と(3)で分かったことを書き入れれば、

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{l'}{c-v}+\frac{l'}{c+v}\right)\right\}=\tau\left(l',0,0,t+\frac{l\prime}{c-v}\right)\cdots\cdots(4)$$

□

今$l'=x'$を無限小量とすれば、この関係式は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

という微分方程式となる。

∵(4)の両辺を$x'=l'$で微分します。

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx'}\tau(0,0,0,t)+\frac{d}{dx'}\tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\right\}=\frac{d}{dx'}\tau\left(x',0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right)$$

ここで、合成関数の微分法を一般化した連鎖法則というのを使います。それは、

「$x=x(t), y=y(t)$は微分可能で、点$\big(x(t),y(t)\big)$は領域 D 内にあるとする。D で微分可能な関数$f(x,y)$に対して、$z=z(t)=f(x(t),y(t))$は t に関して微分可能であり$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$が成り立つ。」（河添健（2018: 46）『解析入門（‘18）』放送大学教育振興会より）というもので、これを 4 変数の場合に拡張したものを使うことになります。

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dx'}t\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dx'}\left(t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dx'}x'+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dx'}0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dx'}\left(t+\frac{x'}{c-v}\right)$$

↑ここはちょっと自信がありません。一度全体をx'で偏微分したところをもう一度x'で微分したりしていいものでしょうか？　飯高先生にはこれでよいと言われましたが。

$$\frac{1}{2}\left\{(0+0+0+0)+\left(0+0+0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\right)\right\}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+0+0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{c-v}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}\cdots\cdots\cdots(5)$$

□

本文に戻ります。

あるいは、

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

と書き換えられる。

∵　(5)より

$$\frac{1}{2}\frac{c+v+c-v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{c+v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

$$\frac{c}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{c+v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

$$0=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

□

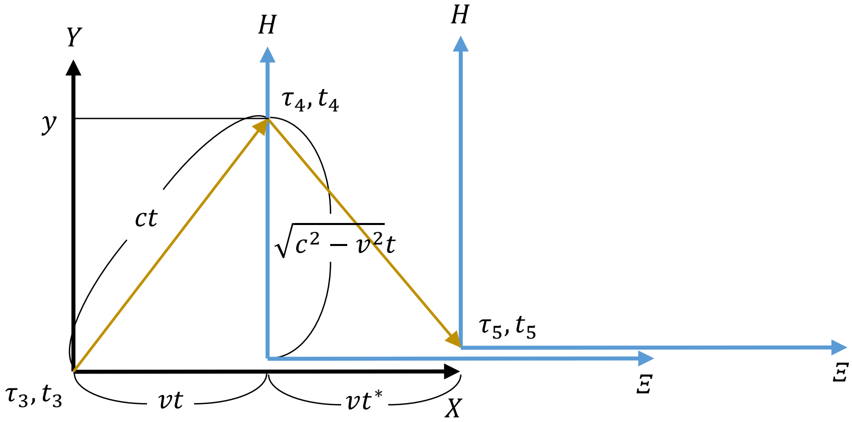
ここで次のことを注意しておこう。すなわち、k 系の座標原点の代わりに、他の任意の点を光源としても、それ故またx', y, zの値を、任意の値に置き換えても、上と全く同じτの方程式が成立するということである。

今まで述べた議論と同じことをH（イータ）及びZ（ゼータ）軸の方向に適用すれば、τに関して次の方程式が導かれる：

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0, \frac{\partial\tau}{\partial z}=0$$

この式を導くに当たり、注意すべき点は、K 系から眺めたとき、HあるいはZ軸方向への光の伝播速度が$\sqrt{c^2-v^2}$であるということである。

∵



上図のように、光が時刻t_3秒に原点を出発してt秒後のt_4秒にH軸上の座標 y の地点に到着し、さらにt^*秒後の時刻t_5秒に運動系 k の原点に戻ったとすると、ピタゴラスの定理から、

$$y=\sqrt{c^2-v^2}t=\sqrt{c^2-v^2}t^*$$

$$t=\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}=t^*$$

$$t_4=t_3+t=t_3+\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$t_5=t_4+t^*=t_3+t+t^*=t_3+2t=t_3+\frac{2y}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

各地点での時刻を運動系 k で測った値をτ_3, τ_4, τ_5とすると、

$$\frac{1}{2}(\tau_3 + \tau_5) = \tau_4$$

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_3) + \tau(0,0,0,t_5)\} = \tau(0,y,0,t_4)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t_3) + \tau\left(0,0,0,t_3 + \frac{2y}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)\right\} = \tau\left(0,y,0,t_3 + \frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)$$

両辺を y で微分すると、

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dy}t_3\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dy}\left(t_3 + \frac{2y}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dy}y + \frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dy}0 + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dy}\left(t_3 + \frac{y}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\{(0+0+0+0) + \left(0+0+0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)\right\} = 0 + \frac{\partial\tau}{\partial y} + 0 + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0$$

同様に、光が時刻t_6秒に原点を出発してT秒後のt_7秒にZ軸上の座標zの地点に到着し、さらにT^*秒後の時刻t_8秒に運動系 k の原点に戻ったとすると、ピタゴラスの定理から、

$$z = \sqrt{c^2 - v^2}T = \sqrt{c^2 - v^2}T^*$$

$$T = \frac{z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = T^*$$

$$t_7 = t_6 + t = t_6 + \frac{z}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$t_8 = t_7 + T^* = t_6 + T + T^* = t_6 + 2T = t_6 + \frac{2z}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

各地点での時刻を運動系 k で測った値をτ_6, τ_7, τ_8とすると、

$$\frac{1}{2}(\tau_6 + \tau_8) = \tau_7$$

$$\frac{1}{2}\{\tau(0,0,0,t_6) + \tau(0,0,0,t_8)\} = \tau(0,0,z,t_7)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\tau(0,0,0,t_6) + \tau\left(0,0,0,t_6 + \frac{2z}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)\right\} = \tau\left(0,0,z,t_6 + \frac{z}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right)$$

両辺を z で微分すると、

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dz}t_6\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dz}\left(t_6+\frac{2z}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{\partial\tau}{\partial x'}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial y}\frac{d}{dz}0+\frac{\partial\tau}{\partial z}\frac{d}{dz}z+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{d}{dz}\left(t_6+\frac{z}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\{(0+0+0+0)+\left(0+0+0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)\right\}=0+0+\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=0$$

□

以上三個の方程式、及びτが、独立変数x', y, z, tの一次式であるということから、

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

が導かれる。ここで a は、今のところ、v の一個の未知関数$a(v)$を表すとする。また簡単のために、k 系の原点に対して、$t=0$のとき、$\tau=0$となるものと仮定した。

$$\because\quad\begin{cases}\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0 & (6)\\ \frac{\partial\tau}{\partial y}=0 & (7)\\ \frac{\partial\tau}{\partial z}=0 & (8)\\ \tau=px'+qy+rz+st+u & (9)\\ \qquad p,q,r,s,u\colon const & \end{cases}$$

(9)より

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}=p,\frac{\partial\tau}{\partial y}=q,\frac{\partial\tau}{\partial z}=r,\frac{\partial\tau}{\partial t}=s \cdots\cdots (10)$$

(7), (8), (10)より

$$q=0, r=0 \cdots\cdots (11)$$

(10)を(6)に代入

$$p+\frac{v}{c^2-v^2}s=0$$

$$p=-\frac{v}{c^2-v^2}s \cdots\cdots (12)$$

(10), (11), (12)を(9)に代入

$$\tau = -\frac{v}{c^2 - v^2} s x' + st + u = s\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right) + u$$

$t = 0$のとき$x' = y = z = 0, \tau = 0$だから$u = 0$。$s = a(v)$とおけば、

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$$

□

上の結果を利用すれば、光が（光速度不変の原理、並びに相対性原理が要求するように）運動系から見ても、速さcで伝播するということを方程式の形に書き表すことにより、ξ, η, ζをx, y, z, tを用いて表すことが容易にできる。

この目的のために、$\tau = 0$の瞬間にξの増加する方向に向けて光が、k 系の原点から発射されたとしよう。この光に対しては

$$\xi = c\tau$$

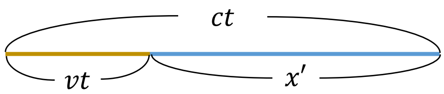
が成立する。これに、上に求めたτの形を代入すると

$$\xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2} x'\right)$$

となる。一方、K 系から見れば、k 系の原点に対する光の先端の相対速度は$c - v$である。そこで、

$$\frac{x'}{c - v} = t$$

∵「相対速度」というのは光速度不変の原理に照らして不適切な言い方です。ドイツ語原典でこの箇所は Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangspunkt von *k* im ruhenden System gemessen mit der Geschwindigkeit $V - v$, so daß gilt: $\frac{x'}{V-v} = t$.と書かれており、直訳すると、「静止系で測られる k 系の原点への相対的光線はしかし速度$V - v$で運動しているので、$\frac{x'}{V-v} = t$が成り立つ。」となります（ドイツ語原典では光速は V で表されています)。これも不適切と言えば不適切な言い方ですが、全体として計算は光速度不変の原理に違反していません。



$$ct - vt = x'$$

よって、

$$\frac{x'}{c - v} = t$$

□

この関係を用いて、ξの中のtをすべてx'を使って書き換えると、

$$\xi = ac\left(\frac{x'}{c-v} - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right) = ac\frac{(c+v)x' - vx'}{c^2-v^2} = ac\frac{cx'}{c^2-v^2} = a\frac{c^2}{c^2-v^2}x'$$

上に述べたのと同じような考えを、H軸の方向に進む光に適用することにより、

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

ここで光の先端に対する K 系から見た関係式

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}} = t, x' = 0$$

を使って t を消去すると、

$$\eta = ac\left(\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}} - \frac{v}{c^2-v^2}\cdot 0\right) = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}y$$

全く同様に次の関係式も導かれる：

$$\zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z$$

$\because$

$$\zeta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{c^2-v^2}} = t, x' = 0$$

$$\zeta = ac\left(\frac{z}{\sqrt{c^2-v^2}} - \frac{v}{c^2-v^2}\cdot 0\right) = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z.$$

□

τ及びξに対する式の中のx'を$x - vt$と書けば、

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z.$$

ここで、

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \varphi(v) = \frac{a(v)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

である。φは今のところ、vの一つの未知関数である。

ここでもし、k 系の最初の位置について、またτの始点について、何も仮定しなかったならば、上に求めた関係式の右辺には、それぞれ一個の未定の定数が追加されることになる。

$\because \qquad \tau = a\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right) = a(v)\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}(x-vt)\right) = a(v)\left(t + \frac{v^2}{c^2-v^2}t - \frac{v}{c^2-v^2}x\right) = a(v)\left(\frac{c^2-v^2+v^2}{c^2-v^2}t - \frac{v}{c^2-v^2}x\right) = a(v)\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}t - \frac{v}{c^2-v^2}x\right) = a(v)\frac{c^2}{c^2-v^2}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = a(v)\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \frac{a(v)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2-v^2}x' = a(v)\frac{c^2}{c^2-v^2}(x-vt) = a(v)\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}(x-vt)$$

$$= \frac{a(v)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x-vt) = \varphi(v)\beta(x-vt)$$

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}y = a(v)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}y = \varphi(v)y$$

$$\zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}}z = a(v)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}z = \varphi(v)z$$

□

さて、静止系から眺めたとき、どんな光でも、既に仮定したように、それが速さ c で伝播するならば、運動系（k 系）からそれを眺めたときも、同じように速さ c で伝播するということを証明しなければならない。なぜならば、光速度不変の原理が相対性原理と矛盾なく両立できるということを、未だ証明していないからである。

今時刻$t=\tau=0$に、一致している両座標系の共通の原点から光の球面波が発射されたとする。K 系から見れば、この波は速さ c で、次第に広がっていく。この球面波が、時刻 t に点(x,y,z)に到達したとすれば

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = ct$$
$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$$

が成り立つ。

この関係式に、既に求めた(ξ,η,ζ,τ)と(x,y,z,t)の間の変換公式を用いると、簡単な計算の後に

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = c^2\tau^2$$

という関係式が導かれる。

$$\because \quad \xi = \varphi(v)\beta(x - vt),\ \eta = \varphi(v)y,\ \zeta = \varphi(v)z,\ \tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - c^2\tau^2$$

$$= \varphi(v)^2\beta^2(x - vt)^2 + \varphi(v)^2y^2 + \varphi(v)^2z^2 - c^2\varphi(v)^2\beta^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2$$

$$= \varphi(v)^2\left[\beta^2(x^2 - 2vtx + v^2t^2) + y^2 + z^2 - \beta^2c^2\left(t^2 - \frac{2v}{c^2}tx + \frac{v^2}{c^4}x^2\right)\right]$$

$$= \varphi(v)^2\left[\beta^2\left\{\left(x^2 - \frac{v^2}{c^2}x^2\right) - (2vtx - 2vtx) + (v^2t^2 - c^2t^2)\right\} + y^2 + z^2\right]$$

$$= \varphi(v)^2\left[\beta^2\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 - (c^2 - v^2)t^2\right\} + y^2 + z^2\right]$$

$$= \varphi(v)^2\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x^2 - c^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)t^2\right\} + y^2 + z^2\right]$$

$$= \varphi(v)^2(x^2 - c^2t^2 + y^2 + z^2) = \varphi(v)^2(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)$$

よって、$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ならば、$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - c^2\tau^2$=0.

□

この式を見ると、ここで考えた光の波は、k 系から眺めても、速さ c で広がる球面波であることが分かる。これは、我々の二つの基本原理が互いに矛盾なく両立し得ることを示すものである。

先に求めた変換公式には、v の関数$\varphi(v)$が、なお未定のままで顔を出している。これから、このφを決定しよう。

この目的のために第三の座標系 K'を考えよう。これは k 系に対して、Ξ軸に平行な並進運動をしているとする。K'系の原点は k 系に対して$-v$の速さでΞ軸の上を運動しているとする。さらに$t = 0$の瞬間には、三つの座標系の原点はすべて一致し、そのとき、原点では、つまり$t = x = y = z = 0$に対して、K'系の時刻 t'も$t' = 0$になるとする。そこで K 系から k 系へ、さらに k 系から K'系へと二回の変換を重ねることにより、以下の関係が導かれる [2]:

$$t' = \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\left(\tau + \frac{v}{c^2}\xi\right) = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)t$$

$$\because\ t' = \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\left\{\varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) + \frac{v}{c^2}\varphi(v)\beta(x - vt)\right\}$$

[2] ここの x'と 8 ページの下の方で導入した $x'(= x - vt)$を混同しないように注意されたい。

$$= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot\beta(-v)\cdot\beta(v)\left\{\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)+\frac{v}{c^2}(x-vt)\right\}$$

$$= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\cdot\beta(v)\cdot\beta(-v)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t$$

$$= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t\text{-}$$

$$= \varphi(v)\cdot\varphi(-v)t$$

□

$$x' = \varphi(-v)\cdot\beta(-v)(\xi+v\tau) = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)x$$

$$\because\ \ x' = \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\left\{\varphi(v)\beta(x-vt)+v\varphi(v)\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\right\}$$

$$= \varphi(-v)\cdot\beta(-v)\cdot\varphi(v)\cdot\beta(v)\left\{(x-vt)+\left(vt-\frac{v^2}{c^2}x\right)\right\}$$

$$= \varphi(-v)\cdot\varphi(v)\cdot\beta(v)\cdot\beta(-v)\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)x = \varphi(-v)\cdot\varphi(v)x$$

□

$$y' = \varphi(-v)\eta = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)y$$
$$z' = \varphi(-v)\zeta = \varphi(v)\cdot\varphi(-v)z$$

ここに導かれた、x', y', z'とx, y, zの間の関係式には t が顔を出さないから、K 系と K'系は互いに相手に対して静止していることが分かる。それ故、K から K'への変換は恒等変換でなければならない。従って、

$$\varphi(v)\cdot\varphi(-v) = 1$$

である。

ここで$\varphi(v)$の意味を考えよう。今 k 系でH軸の役をしている棒に注目しよう。この両端の座標は$\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$及び$\xi = 0, \eta = l,\ \zeta = 0$とする。$H$軸の役を担うこの棒は、$K$ 系に対して、棒自身に垂直の方向に、速さ v で走っている。この棒の両端を K 系から眺めるとき、K の時刻が t のときに、上端の座標は

$$x_1 = vt, y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}(\because l = \varphi(v)y_1), z_1 = 0$$

また下端の座標は

$$x_2 = vt, y_2 = 0, z_2 = 0$$

従って、K から眺めたときの棒の長さは$\frac{l}{\varphi(v)}$である。この式から$\varphi(v)$の意味が分かるであ

ろう。今静止系 K に対して一本の棒が、棒自身の軸に垂直な方向に走っているとする。静止系から測った棒の長さは、速度の大きさ$|v|$にだけは依存することがあっても、速度の方向〔ただし棒の軸が速度の方向に垂直という条件を忘れてはならない〕や、その向きには関係しないことが、空間の対称性から、納得されよう。そこで静止系から測った、走る棒の長さは、vを$-v$に置き換えても、その値が不変のはずである。それ故

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}$$

あるいは

$$\varphi(v) = \varphi(-v)$$

である。この関係と、先に求めた式から$\varphi(v) = 1$でなければならないという結論に達する。そこで変換公式は

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z$$

ここで

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

である。

§4. 動いている剛体、並びに時計に関する変換公式の物理学的意味

半径Rの剛体の球（静止しているとき球形の物体）を考えよう。この球は、運動系 k に対して静止しており、球の中心は k 系の座標原点に固定されているとする。これは静止系 K に対して速さ v で走っている。その表面を表す方程式は〔k 系から見れば〕

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

K 系の時刻$t = 0$の瞬間に、この方程式を K 系から見れば

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right\}^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$\because \quad \xi = \beta(x - vt) = \beta x \ \ (\because t = 0),\ \eta = y,\ \zeta = z.$

この式を見れば分かるように、静止状態では球の形をしている剛体でも、走っている状態では――つまり、K 系から眺めれば――三軸の長さが

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}, R, R$$

という回転楕円体の形になる。

すなわち、球（だけでなく、どんな形の剛体でも）の Y、及び Z 方向の大きさには、剛体が走っていることに基づく変化はない。これに対して X 方向の大きさは$1:\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$の割合で、収縮したように見える。$v$ が大きい程、この収縮する度合いは、一層、強烈となる。特に$v=c$のときは、すべての走っている物体は——静止系から眺めるとき——扁平な形に圧縮されてしまう。v が超光速となる場合は、我々の考察は無意味なものとなる。なお、我々の理論においては光速 c が物理学的に見て、無限大の速さと同じ役目を担うことが、これ以後の議論を見れば、理解されよう。

“静止系”K に静止している物体を、一様な速さで走っている他の座標系から眺めたとき、上に述べたことと同じ結果が観測されることは、明白であろう。

次に、静止系に固定されたときは、時間 t を示し、運動系に固定されているときは、時間τを与えるという時計を考えよう。このような特性を持つ一個の時計が k 系の座標原点に固定され、時間τを示すように調整されているとしよう。今、静止系からこの時計を眺めたとき、それはどのようなテンポで時を刻むように見えるであろうか？

静止系から眺めた場合、静止系の時刻が t のとき、k 系の原点に固定されている時計の示す時刻をτ、またそれのいる場所を x とすれば、変換公式により

$$\tau=\frac{\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

また x と t の間には

$$x=vt$$

という関係がある。これを上の公式に代入すれば

$$\tau=t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=t-\left\{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right\}t$$

となる。

∵　$x=vt$を$\tau=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$に代入すると、

$$\tau=\frac{t-\frac{v}{c^2}vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{t\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\left(1-1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)t$$

$$= t - \left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right\} t$$

□

それ故、静止系で考えると、静止系の時間の 1 秒ごとに、走っている時計は$\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right\}$秒ずつ——あるいは$\left(\frac{v}{c}\right)^4$以上を無視すれば$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$秒ずつ——遅れることになる。

$\because\ \ x = \frac{v}{c}, f(x) = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$とおいて、$f(x)$のマクローリン展開を考えます。

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= -(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) - 2x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - x^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= -3x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 3x^3(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -3(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x)$$

$$- \left\{9x^2(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3x^3\left(-\frac{5}{2}(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}}\right) \cdot (-2x)\right\}$$

$$= -3(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} - 18x^2(1 - x^2)^{-\frac{5}{2}} - 15x^3(1 - x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

$$\therefore f^{(4)}(0) = -3$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-3}{4!}x^4 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \cdots$$
$$\therefore 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \fallingdotseq 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

□

上に述べたことから、ここに次のような奇妙な結果が導かれる。今 K 系の二点 A, B に静止している二個の時計があるとする。これらは K 系から見たとき、互いに相手と同じ時刻を示すように調整されているとする。今我々が A にある時計を速さ v で、A, B を結ぶ直線に沿って、B に向かって移動させたとする。この時計が B に到着した以後は、これら二つの時計は最早、等しい時間を示さない。A から B に到着した時計は、元々から B にあった時計よりも$\frac{1}{2}t\left(\frac{v}{c}\right)^2$秒（$\left(\frac{v}{c}\right)^4$以上を無視した場合）だけ遅れている。ここで t は、時計が A から B まで移動するのにかかった時間である。

なお次のことも容易に分かるであろう。すなわち、一個の時計が A から B まで、任意の折れ線に沿って運搬された場合にも、上述の結論と同じことが成立する。さらに A と B とが一致し、移動のコースが閉多角形となる場合でも同じ結論が成り立つ。

ここで、任意の折れ線に沿った移動に対して導かれた上述の結論が、任意の連続曲線に沿って移動させた場合にも、同様に成立すると仮定するならば、次の定理が導かれる。

今点 A に、同じ時刻を示す二個の時計があるとする。そのうちの一個の時計を、一定の速さ v で、A を通る任意の閉曲線に沿って t 秒かけて一周させ、再び A に戻したとする。この時計が A に帰着したとき、それの示す時刻は、A に留まっていたもう一つの時計に比べて$\frac{1}{2}t\left(\frac{v}{c}\right)^2$秒だけ遅れている。

この定理から次のことが推論されよう。地球の赤道上に固定され、自転する地球に伴って、動いている平衡輪式時計（Unruhuhr）は、地球の南北いずれかの極点に置かれた全く同じ構造や性能を持つ時計（置かれた場所の違いを別にすれば、これら二つの時計は全く同じ条件のもとにあるとする）に比べて、非常にわずかではあるが、遅いテンポで時を刻むということである。

§4.　速度の合成則

K 系の X 軸に沿って、速さ v で走っている座標系 k から眺めたとき、一個の点が、方程

式

$$\xi = w_\xi \tau, \eta = w_\eta \tau, \zeta = 0$$

に従って、運動しているとする。ここでw_ξ, w_ηはある定数である。

そこで K 系から眺めたときの、この質点の運動を調べてみよう。今§3 に導かれた変換公式を用いて、上に与えられた質点の方程式をx, y, z, tで書き表すと次のようになる。

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{c^2}} t, y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{c^2}} w_\eta t, z = 0$$

∵

$$\begin{cases} \xi = w_\xi \tau \\ \xi = \beta(x - vt) \\ \tau = \beta\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases}$$

$$\beta(x - vt) = w_\xi \beta\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)$$

$$\left(\beta + w_\xi \beta \frac{v}{c^2}\right) x = \left(\beta v + w_\xi \beta\right) t$$

$$\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right) x = \left(w_\xi + v\right) t$$

$$x = \frac{w_\xi + v}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)} t.$$

$$\begin{cases} \eta = w_\eta \tau \\ \eta = y \\ \tau = \beta\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases}$$

$$y = w_\eta \beta\left(t - \frac{v}{c^2} \frac{w_\xi + v}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)} t\right) = \beta\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{w_\xi + v}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)}\right) w_\eta t$$

$$= \beta \frac{1 + \frac{v w_\xi}{c^2} - \frac{v w_\xi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{c^2}} w_\eta t = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{c^2}} w_\eta t$$

$$\begin{cases} \zeta = 0 \\ \zeta = z \end{cases}$$

$$z = 0$$

□

これを見れば分かるように、我々の理論では、速度の合成に関する平行四辺形の法則は、ただ（$\frac{v}{c}$及び$\frac{w}{c}$の）一次までの範囲で、近似的に成立するに過ぎない。

今

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = {w_\xi}^2 + {w_\eta}^2,$$

$$\alpha = arctan\frac{w_\eta}{w_\xi}$$

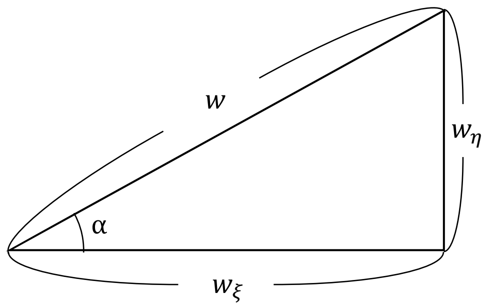
とおけば、αは速度$\vec{v}$と$\vec{w}$の間の（k 系から見た）角を示す。簡単な計算により、次の結果が導かれる：

$$U = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha - \left(\frac{vw\sin\alpha}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{c^2}}$$

∵

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{vw_\xi}{c^2}}t \text{なので} \frac{dx}{dt} = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{vw_\xi}{c^2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vw_\xi}{c^2}}w_\eta t \text{なので} \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vw_\xi}{c^2}}w_\eta$$



$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$
= \frac{\left(w_\xi + v\right)^2}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)^2} + \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)^2} {w_\eta}^2 = \frac{{w_\xi}^2 + 2 w_\xi v + v^2 + {w_\eta}^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 {w_\eta}^2}{\left(1 + \frac{v w_\xi}{c^2}\right)^2}
$$

$$
= \frac{w^2 + 2vw \cos\alpha + v^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 w^2 \sin^2\alpha}{\left(1 + \frac{vw\cos\alpha}{c^2}\right)^2}
$$

$$
U = \frac{\sqrt{v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha - \left(\frac{vw\sin\alpha}{c}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{c^2}}
$$

□

合成された速さUを表す式の中に、v と w が、対称的な形で含まれていることは注目に値する。もし w が X 軸（Ξ軸と言ってもよい）の方向を向く速度であるならば、U は次のようになる：

$$
U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}
$$

∵

$$
\cos\alpha = 1, \sin\alpha = 0
$$

□

この公式から次のことが分かる。すなわち、c より小さい二つの速さを合成するときは、その結果は常に c より小さい速さとなるということである。

今$v = c - \kappa, w = c - \lambda$とおく。ここで$\kappa, \lambda$はいずれも c より小さい正の数とする。そのとき U は次のようになる：

$$
U = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{c}} < c
$$

∵

$$
U = \frac{c - \kappa + c - \lambda}{1 + \frac{(c - \kappa)(c - \lambda)}{c^2}} = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{c + \left(c - (\kappa + \lambda) + \frac{\kappa\lambda}{c}\right)} = c\frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{c}} < c
$$

□

v と w が、同じ方向を持つ場合に対する合成速度 U の公式を上に求めたが、これは§3 に述べた変換の公式を二度、適用することによっても導かれる。今§3 に述べたような二つの座標系 K 及び k の他に、第三の座標系 k'を考えよう。k'系の原点は k 系のΞ軸に沿って、k 系に対して、速さ w で並進運動をしているとする。そうすれば、k'系の座標x', y', z', t'と、

これに対応するK系のx, y, z, tの間に、§3 に求めたのと同じ形の変換公式が導かれる。ただし§3 の公式に出てきた“v”の代わりに

$$\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$$

という量が、ここに導かれた公式には顔を出すということが、両者の間の唯一の違いである。

∵

$$\begin{cases} t' = \beta(w)\left(\tau - \frac{w}{c^2}\xi\right), \tau = \beta(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' = \beta(w)(\xi - w\tau), \xi = \beta(v)(x - vt) \\ y' = \eta, \eta = y \\ z' = \zeta, \zeta = z \end{cases}$$

$$t' = \beta(w)\left\{\beta(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) - \frac{w}{c^2}\beta(v)(x - vt)\right\} = \beta(w)\cdot\beta(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x - \frac{w}{c^2}x + \frac{vw}{c^2}t\right)$$

$$= \beta(w)\cdot\beta(v)\left\{\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)t - \frac{1}{c^2}(v+w)x\right\}$$

$$= \beta(w)\cdot\beta(v)\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)\left(t - \frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c^2}x\right)$$

ここで

$$\beta(w)\cdot\beta(v)\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{w}{c}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1 + \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1 - \left\{\left(\frac{w}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right\} + \left(\frac{w}{c}\right)^2\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)^2 - \frac{2vw}{c^2} - \left\{\left(\frac{w}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}}} = \frac{1 + \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{v+w}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c}\right)^2}} = \beta\left(\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}\right)$$

故に

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c}\right)^2}}\left(t-\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c^2}x\right) = \beta\left(\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}\right)\left(t-\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c^2}x\right)$$

次に

$$x' = \beta(w)\left\{\beta(v)(x-vt)-w\beta(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\right\} = \beta(w)\cdot\beta(v)\left\{\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)x-(v+w)t\right\}$$

$$= \beta(w)\cdot\beta(v)\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)\left(x-\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}{c}\right)^2}}\left(x-\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}t\right) = \beta\left(\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}\right)\left(x-\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}t\right)$$

そして

$$y' = y, z' = z$$

以上は v と w の合成速度 U が$U = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$であることを示している。

□

なおこの事実から、ここに述べたような座標変換は——当然そうなくてはならないように——数学でいう一つの群を成すことが分かる。

∵　まず、群の定義を齋藤正彦（1966）『線型代数入門』から引用します。

定義.　集合$\boldsymbol{G}$の元a, bに対し、積と称する第三の元（これをabで表す）が定まり、つぎの公理を充すとき、$\boldsymbol{G}$は群（group）であるという。

1. $(ab)c = a(bc)$　（結合法則）
2. 単位元と称する特別な元eがただ一つ存在して、$\boldsymbol{G}$のすべての元aに対して、

$$ae = ea = a$$

が成り立つ。

3. $\boldsymbol{G}$の任意の元aに対し、

$$ax = xa = e$$

となるような$\boldsymbol{G}$の元xがただ一つ存在する。これをaの逆元といい、a^{-1}で表す。

——齋藤（1966: 248）

今の場合、相対論的速度の集合$\boldsymbol{V}$が速度の合成という積$\boldsymbol{v\cdot w=\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}}$に関して群を成すことを確認する。

まず、$(v\cdot w)\cdot u=v\cdot(w\cdot u)$を確認する。

$$(v\cdot w)\cdot u=\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}+u}{1+\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}u}{c^2}}=\frac{v+w+u\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{vw}{c^2}\right)\left(1+\frac{\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}u}{c^2}\right)}=\frac{w+u+v+\frac{uvw}{c^2}}{1+\frac{vw}{c^2}+\frac{v+w}{c^2}u}$$

$$=\frac{w+u+v\left(1+\frac{wu}{c^2}\right)}{1+\frac{vw}{c^2}+\frac{uv}{c^2}+\frac{wu}{c^2}}=\frac{w+u+v\left(1+\frac{wu}{c^2}\right)}{1+\frac{v}{c^2}(w+u)+\frac{wu}{c^2}}$$

$$=\frac{w+u+v\left(1+\frac{wu}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{wu}{c^2}\right)+\frac{(w+u)v}{c^2}}=\frac{v+\frac{w+u}{1+\frac{wu}{c^2}}}{1+\frac{\frac{w+u}{1+\frac{wu}{c^2}}v}{c^2}}=v\cdot(w\cdot u)$$

$v_e=0$が単位元であることを確認する。

$$v\cdot v_e=v\cdot 0=\frac{v+0}{1+\frac{v\cdot 0}{c^2}}=v=\frac{0+v}{1+\frac{0\cdot v}{c^2}}=0\cdot v=v_e\cdot v$$

最後に、$v^{-1}=-v$が逆元であることを確認する。

$$v\cdot v^{-1}=v\cdot(-v)=\frac{v-v}{1-\frac{v^2}{c^2}}=0=v_e=\frac{-v+v}{1-\frac{v^2}{c^2}}=(-v)\cdot v=v^{-1}\cdot v$$

□

以上で、二つの原理から導かれる、そして我々にとって必要な運動学の諸定理はすべて導かれた。そこでこれから、電気力学におけるそれの応用の説明に移ることにする。

初めに言いましたように電気力学の部は読みませんが、ここまでの議論だけでも光速度不変の原理、それと矛盾しない相対性原理、走っている物体の走っている方向での収縮、走っている物体の時間の遅れ、光速が物体に可能な最高速度であることなどの相対性理論の有名な不思議がきれいに説明されるところが鑑賞できました。