フィボナッチ数列のさまざまな一般化

遠藤 有子

平成 18 年 2 月 6 日

目 次

1 目的

フィボナッチ数列を一般化したある数列の性質をいくつか見出し、それを数学的に証明する.

2 方法

2.1 フィボナッチ数列による導入

フィボナッチ数列

$$\{f_n\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \cdots]$$

は次の規則で n 年後のコドモとオトナの合計 f_n として得られる。

①コドモは一年後オトナになる。
②オトナは一年後コドモを一人生み、そのままオトナを続ける。
③一年目はコドモ一人、オトナ０人。

n 年後のコドモの数を g_n、オトナの数を h_n とし、これらの合計をフィボナッチ数列 f_n とする。
定義より、フィボナッチ数列のプログラムは以下のようにできる。

```
/* フィボナッチ数列 */
fib(0,1).
fib(1,1).
fib(N,F):-N>1,N1 is N1 is N-1,N2 is N1-1,
          fib(N1,F1),fib(N2,F2),
          F is F1 + F2.
fb(N,F):-N>0,fb_aux([N,F],1,1,0).
fb_aux([N,F],N,F,F1).
fb_aux(Const,N,F,F1):-N1 is N + 1,F0 is F + F1,
                    fb_aux(Const,N1,F0,F).
```

数列 $\{g_n\},\{h_n\}$ のリストは、以下のようになる。

$$\{g_n\} = [1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots]$$
$$\{h_n\} = [0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\cdots]$$

すると、$n+1$ 年後のコドモの数は n 年後のオトナの数と等しく、$n+1$ 年後のオトナの数は n 年後のコドモの数とオトナの数の合計である。

このことより、g_n, h_n は以下の関係式（漸化式）

$$g_{n+1} = h_n$$
$$h_{n+1} = g_n + h_n$$

を満たす。これらより、g_n, h_n はそれぞれ次の漸化式を持つ。

$$g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$$
$$h_{n+1} = h_n + h_{n-1}$$

よってこれらのフィボナッチ数列の漸化式より

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

が得られた。
これらの数列の漸化式は、初期値がすべて異なるにも関わらず、同じ係数の漸化式を持つことがわかった。

フィボナッチ数列には以下のような面白い性質がある。
① $f_n + f_{n+3} = 2f_{n+2}$

$$\begin{aligned}
\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{f_{n+3}\} &= [3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots] \\
\{f_{n+2}\} &= [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots] \\
2\{f_{n+2}\} &= 2 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots] \\
&= [4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, \cdots]
\end{aligned}$$

② $f_n + f_{n+4} = 3f_{n+2}$

$$\begin{aligned}
\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{f_{n+4}\} &= [5, 8, 13, 21, 34, 55, 144, 233, 377, 610, \cdots] \\
\{f_{n+2}\} &= [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots] \\
3\{f_{n+2}\} &= 3 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots] \\
&= [6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165, 267, 432, \cdots]
\end{aligned}$$

③ $g_{n+2} + h_n = f_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\{g_{n+2}\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{h_n\} &= [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots] \\
\{f_{n+1}\} &= [1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots]
\end{aligned}$$

④ $g_n + 2h_n = f_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\{g_n\} &= [1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots] \\
\{h_n\} &= [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots] \\
2\{h_n\} &= [0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, \cdots] \\
\{f_{n+1}\} &= [1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots]
\end{aligned}$$

⑤ $2g_{n+2} - h_{n+1} = f_n$

$$\begin{aligned}
\{g_{n+2}\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
2\{g_{n+2}\} &= [2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, \cdots] \\
\{h_{n+1}\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots]
\end{aligned}$$

⑥ $g_{n+2} + h_{n+1} = 2f_n$

$$\begin{aligned}
\{g_{n+2}\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{h_{n+1}\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
\{f_n\} &= [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots] \\
2\{f_n\} &= [2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, \cdots]
\end{aligned}$$

次に、ルカ数列についても述べる。

$$\{l_n\} = [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, \cdots]$$

は次の規則で n 年後のコドモとオトナの合計 l_n として得られる。

①一年目はオトナ１人。
②２年目にオトナはコドモを一人生み、オトナを続け，養子を一人迎える。
③コドモは一年後オトナになる。
④オトナは一年後コドモを一人生み、そのままオトナを続ける。

n 年後のコドモの数を s_n、オトナの数を t_n とし、これらの合計をルカ数列 l_n とする。

定義より、ルカ数列のプログラムは以下のようにできる。

```
/* ルカ数列 */
:- dynamic lk_l/2.
:- dynamic l/2.
l(2,3).
l(1,1).
lk_l(2,3):- !.
lk_l(1,1):- !.
lk_l(N,F):- N>2,N1 is N-1,N2 is N1-1,!,
           lk_l(N1,F1),lk_l(N2,F2),
           F is F1 + F2,!,
           asserta(l(N,F)),
           asserta((lk_l(N,F):- !)).
```

数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ のリストは、以下のようになる。

$$\{s_n\} = [0, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \cdots]$$
$$\{t_n\} = [1, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \cdots]$$

すると、$n+1$ 年後のコドモの数は n 年後のオトナの数と等しく、$n+1$ 年後のオトナの数は n 年後のコドモの数とオトナの数の合計である。ただし，$n > 2$ とする.

このことより、s_n, t_n は以下の関係式（漸化式）

$$s_{n+1} = t_n$$
$$t_{n+1} = s_n + t_n$$

を満たす。これらより、数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を持つ。

$$s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$$
$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$$

よってこれらのルカ数列の漸化式より

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}$$

が得られた。
フィボナッチ数列と同様に、これらの漸化式は初期値がすべて異なるにも関わらず、同じ漸化式を持つ。
そこで、ルカ数列のおもしろい性質をいくつか述べる。

① $l_n + l_{n+3} = 2l_{n+2}$

$$\begin{aligned}
\{l_n\} &= [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \cdots] \\
\{l_{n+3}\} &= [7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \cdots] \\
\{l_{n+2}\} &= [4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \cdots] \\
2\{l_{n+2}\} &= [8, 14, 22, 36, 58, 94, 152, 246, 398, 644, \cdots]
\end{aligned}$$

② $l_{n+3} - l_{n+2} = 2l_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\{l_{n+3}\} &= [7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \cdots] \\
\{l_{n+2}\} &= [4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \cdots] \\
\{l_{n+1}\} &= [3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \cdots] \\
2\{l_{n+1}\} &= [6, 8, 14, 22, 36, 58, 94, 152, 246, 398, \cdots]
\end{aligned}$$

同様のことを、フィボナッチ数列・ルカ数列を一般化したある数列について数学的な構造を研究する。

2.2　数列の定義

コドモ・オトナ・コウネンキがそれぞれ次の規則①②③に従って増えていくとする.

①コドモは一年後オトナになる
②オトナは一年後コドモを二人生みコウネンキになる
③コウネンキはそのままコウネンキを続ける

一年目はコドモ一人，オトナ０人，コウネンキ０人として，n 年後のコドモの数を a_n，オトナの数を b_n，コウネンキの数を c_n とし、これらの合計を k_n とする.
すると，$n+1$ 年後のオトナの数は n 年後のコドモの数と等しく，$n+1$ 年後のコドモの数は n 年後のオトナの数の２倍となり，$n+1$ 年後のコウネンキの数は n 年後のオトナの数

と n 年後のコウネンキの数の合計である.

これらの数列をリストで表すと次のようになる。

$$\{a_\mathrm{n}\} = [1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \cdots]$$
$$\{b_\mathrm{n}\} = [0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, \cdots]$$
$$\{c_\mathrm{n}\} = [0, 0, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, 63, 127, \cdots]$$
$$\{k_\mathrm{n}\} = [1, 1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, 63, 127, 127, 255, \cdots]$$
$$(k_\mathrm{n} = a_\mathrm{n} + b_\mathrm{n} + c_\mathrm{n})$$

2.3 数列のプログラム

定義より、この数列 $\{k_\mathrm{n}\}$ のプログラムは以下のようにできる。

```
/* k_{n} 数列*/
:- dynamic kota_k/2.
:- dynamic k/2.
k(2,1).
k(1,1).
kota_k(2,1):- !.
kota_k(1,1):- !.
kota_k(N,F):- N>2,N1 is N-1,N2 is N1-1,!,
             kota_k(N1,F1),kota_k(N2,F2),
             F is F2*2 + 1,!,
             asserta(k(N,F)),
             asserta((kota_k(N,F):- !)).
```

$\{a_\mathrm{n}\}, \{b_\mathrm{n}\}, \{c_\mathrm{n}\}$ のプログラムも初期値を変えるだけでよい.

3　結果

3.1　数列の性質

数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{k_n\}$ をリストに表し、項をひとつずつずらしたりスカラー倍したりしたものの関係を探した結果，以下の①～⑦の関係式を発見できた．
（ここでは、項を m 個ずらすことを　$\{a_{n+m}\},\{b_{n+m}\},\{c_{n+m}\},\{k_{n+m}\}$　、
t 倍することを　$t\{a_n\},t\{b_n\},t\{c_n\},t\{k_n\}$　とする。）

① $\frac{k_n+k_{n+1}}{2}=a_n+2b_n+c_n$

$$\begin{aligned}
\{k_n\} &= [1,1,3,3,7,7,15,15,31,31,\cdots] \\
\{k_{n+1}\} &= [1,3,3,7,7,15,15,31,31,63,\cdots] \\
\{k_n\}+\{k_{n+1}\} &= [2,4,6,10,14,22,30,46,62,94,\cdots] \\
\frac{\{k_n\}+\{k_{n+1}\}}{2} &= [1,2,3,5,7,11,15,23,31,47,\cdots] \\
\{a_n\} &= [1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\cdots] \\
2\{b_n\} &= [0,2,0,4,0,8,0,16,0,32,\cdots] \\
\{c_n\} &= [0,0,1,1,3,3,7,7,15,15,\cdots] \\
\{a_n\}+2\{b_n\}+\{c_n\} &= [1,2,3,5,7,11,15,23,31,47,\cdots]
\end{aligned}$$

② $a_n+c_{n+1}=k_n$

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= [1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\cdots] \\
\{c_{n+1}\} &= [0,1,1,3,3,7,7,15,15,31,\cdots] \\
\{k_n\} &= [1,1,3,3,7,7,15,15,31,31,\cdots] \\
\{a_n\}+\{c_{n+1}\} &= [1,1,3,3,7,7,15,15,31,31,\cdots]
\end{aligned}$$

③ $b_{n+1}+c_{n+1}=k_n$

$$\begin{aligned}
\{b_{n+1}\} &= [1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\cdots] \\
\{c_{n+1}\} &= [0,1,1,3,3,7,7,15,15,31,\cdots] \\
\{k_n\} &= [1,1,3,3,7,7,15,15,31,31,\cdots] \\
\{b_{n+1}\}+\{c_{n+1}\} &= [1,1,3,3,7,7,15,15,31,31,\cdots]
\end{aligned}$$

④ $a_n+b_n-c_n=1$

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= [1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\cdots] \\
\{b_n\} &= [0,1,0,2,0,4,0,8,0,16,\cdots] \\
\{c_n\} &= [0,0,1,1,3,3,7,7,15,15,\cdots]
\end{aligned}$$

⑤ $k_{n+2} - k_{n+1} = 2a_n$

$$\begin{aligned}
\{k_{n+2}\} &= [3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, 63, \cdots] \\
\{k_{n+1}\} &= [1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, \cdots] \\
\{a_n\} &= [1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \cdots] \\
2\{a_n\} &= [2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, \cdots]
\end{aligned}$$

⑥ $k_{n+1} - k_n = 2b_n$

$$\begin{aligned}
\{k_{n+1}\} &= [1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, \cdots] \\
\{k_n\} &= [1, 1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, \cdots] \\
\{b_n\} &= [0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, \cdots] \\
2\{b_n\} &= [0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, \cdots]
\end{aligned}$$

⑦ $a_n + b_{n+2} + c_{n+1} = k_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= [1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \cdots] \\
\{b_n\} &= [0, 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, \cdots] \\
\{b_{n+2}\} &= [0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, \cdots] \\
\{c_n\} &= [0, 0, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, \cdots] \\
\{c_{n+1}\} &= [0, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, \cdots] \\
\{k_{n+1}\} &= [1, 3, 3, 7, 7, 15, 15, 31, 31, 63, \cdots]
\end{aligned}$$

3.2　漸化式の構造

３つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の漸化式は

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2b_n \\
b_{n+1} &= a_n \\
c_{n+1} &= b_n + c_n
\end{aligned}$$

であるが、各数列は同じ漸化式

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \\
b_{n+1} &= b_n + 2b_{n-1} - 2b_{n-2} \\
c_{n+1} &= c_n + 2c_{n-1} - 2c_{n-2}
\end{aligned}$$

を満たすことがわかる。以下でこのことを証明する。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$tE - A = \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}$$

と書ける．定義より行列 A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{A}}(t) &= \det(tE - A) \\ &= t^2(t-1) - 2(t-1) \\ &= t^3 - t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

なので,

$$A^3 - A^2 - 2A + 2E = O$$

が成り立つ。
これは, ３次行列 A に対してケーリーハミルトンの公式を適用した式である．
また、ベクトル u_{n} を

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{n}} \\ b_{\mathrm{n}} \\ c_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

とおくとき、$\mathrm{u}_{\mathrm{n+1}} = A\mathrm{u}_{\mathrm{n}}$ が成り立っているので

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= Au_n \\
&= A \cdot Au_{n-1} \\
&= A^2u_{n-1} \\
&= A^2 \cdot Au_{n-2} \\
&= A^3u_{n-2} \\
&\,. \\
&\,. \\
&\,. \\
&= A^{n-3}A^3u_1 \\
&= A^{n-3}(A^2 + 2A - 2E)u_1 \\
&= (A^{n-1} + 2A^{n-2} - 2A^{n-3})u_1 \\
&= A^{n-1}u_1 + 2A^{n-2}u_1 - 2A_{n-3}u_1 \\
&= u_n + 2u_{n-1} - 2u_{n-2}
\end{aligned}
$$

となる。
これを成分で表すと

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \\
b_{n+1} &= b_n + 2b_{n-1} - 2b_{n-2} \\
c_{n+1} &= c_n + 2c_{n-1} - 2c_{n-2}
\end{aligned}
$$

が得られる。
このように、ある数列 $\{k_n\}$ とそれを生成する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ は、それぞれ異なった初期値を持つが、同じ漸化式を満たすことがわかった。

4　考察

4.1　性質の証明

３．結果　で述べた①〜⑥を証明するためには、両辺は同じ漸化式を満たすので、$n = 1, 2, 3$ について両辺が等しいことを示せばよい。

① $\frac{k_n + k_{n+1}}{2} = a_n + 2b_n + c_n$ の証明

（ｉ）$n = 1$のとき
$\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$
$a_1 + 2b_1 + c_1 = 1 + 2 \cdot 0 + 0 = 1$
（ii）$n = 2$のとき
$\frac{k_2+k_3}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$
$a_2 + 2b_2 + c_2 = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2$
（iii）$n = 3$のとき
$\frac{k_3+k_4}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$
$a_3 + 2b_3 + c_3 = 2 + 2 \cdot 0 + 1 = 3$
よって

$$\frac{k_n + k_{n+1}}{2} = a_n + 2b_n + c_n$$

② $a_n + c_{n+1} = k_n$ の証明

（ｉ）$n = 1$のとき
$a_1 + c_2 = 1 + 0 = 1$
$k_1 = 1$
（ii）$n = 2$のとき
$a_2 + c_3 = 0 + 1 = 1$
$k_2 = 1$
（iii）$n = 3$のとき
$a_3 + c_4 = 2 + 1 = 3$
$k_3 = 3$
よって

$$a_n + c_{n+1} = k_n$$

③ $b_{n+1} + c_{n+1} = k_n$ の証明

（ｉ）$n = 1$のとき
$b_2 + c_2 = 1 + 0 = 1$
$k_1 = 1$
（ii）$n = 2$のとき
$b_3 + c_3 = 0 + 1 = 1$
$k_2 = 1$
（iii）$n = 3$のとき
$b_4 + c_4 = 2 + 1 = 3$
$k_3 = 3$

よって

$$b_{n+1} + c_{n+1} = k_n$$

④ $a_n + b_n - c_n = 1$ の証明
（ｉ）$n = 1$ のとき
$a_1 + b_1 - c_1 = 1 + 0 - 0 = 1$
（ii）$n = 2$ のとき
$a_2 + b_2 - c_2 = 0 + 1 - 0 = 1$
（iii）$n = 3$ のとき
$a_3 + b_3 - c_3 = 2 + 0 - 1 = 1$
よって

$$a_n + b_n - c_n = 1$$

⑤ $k_{n+2} - k_{n+1} = 2a_n$ の証明
（ｉ）$n = 1$ のとき
$k_3 - k_2 = 3 - 1 = 2$
$2a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
（ii）$n = 2$ のとき
$k_4 - k_3 = 3 - 3 = 0$
$2a_2 = 2 \cdot 0 = 0$
（iii）$n = 3$ のとき
$k_5 - k_4 = 7 - 3 = 4$
$2a_3 = 2 \cdot 2 = 4$
よって

$$k_{n+2} - k_{n+1} = 2a_n$$

⑥ $k_{n+1} - k_n = 2b_n$ の証明
（ｉ）$n = 1$ のとき
$k_2 - k_1 = 1 - 1 = 0$
$2b_n = 2 \cdot 0 = 0$
（ii）$n = 2$ のとき
$k_3 - k_2 = 3 - 1 = 2$
$2b_2 = 2 \cdot 1 = 2$
（iii）$n = 3$ のとき
$k_4 - k_3 = 3 - 3 = 0$

$2b_3 = 2 \cdot 0 = 0$
よって

$$k_{n+1} - k_n = 2b_n$$

⑦ $a_n + b_{n+2} + c_{n+1} = k_{n+1}$ の証明
（i）$n = 1$ のとき
$a_1 + b_3 + c_2 = 1 + 0 + 0 = 1$
$k_2 = 1$
（ii）$n = 2$ のとき
$a_2 + b_4 + c_3 = 0 + 2 + 1 = 3$
$k_3 = 3$
（iii）$n = 3$ のとき
$a_3 + b_5 + c_4 = 2 + 0 + 1 = 3$
$k_4 = 3$
よって

$$a_n + b_{n+2} + c_{n+1} = k_{n+1}$$

これらの証明より、初期値の異なる数列の漸化式を、スカラー倍して足したりすることで得られる漸化式は、初期値は異なるが同じ形である。

4.2　一般項を求める

ついで $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{k_n\}$ の一般項を求めよう。

行列 A の固有値を求める.

$$tE - A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}$$

なので，固有多項式は

$$\det(tE - A) = t^2(t-1) - 2(t-1)$$

となり、この根は

$$(t^2 - 2)(t-1) = 0$$

により

$$t=\pm\sqrt{2},1$$

よって行列 A の固有値は $1,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ である.

次にこれらの固有値を用いて数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{k_n\}$ の一般項を求めよう.
一般項は、これらの n 乗の 1 次結合として表されるので、α,β,γ を定数とするとき

$$\alpha+(\sqrt{2})^n\beta+(-\sqrt{2})^n\gamma$$

と書ける。
(ｉ)$\{a_n\}$
$a_n=\alpha+(\sqrt{2})^n\beta+(-\sqrt{2})^n\gamma$
$n=1$ のとき $1=\alpha+\sqrt{2}\beta-\sqrt{2}\gamma$
$n=2$ のとき $0=\alpha+2\beta+2\gamma$
$n=3$ のとき $2=\alpha+2\sqrt{2}\beta-2\sqrt{2}\gamma$
これらを計算すると,

$$\alpha=0 \quad \beta=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \gamma=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

これらを代入して,

$$\begin{aligned}a_n&=(\sqrt{2})^n\frac{\sqrt{2}}{4}+(-\sqrt{2})^n(-\frac{\sqrt{2}}{4})\\&=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{4}+\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^{n+1}\\&=\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{2}^{2k} & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}\\&=\begin{cases}2^k & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}\end{aligned}$$

同様に $\{b_n\},\{c_n\},\{k_n\}$ の一般項を求める.

(ii) $\{b_n\}$

$$\begin{aligned}b_n&=(\sqrt{2})^n\frac{1}{4}+(-\sqrt{2})^n\frac{1}{4}\\&=\begin{cases}0 & (n=2k-1)\\ 2^{k-1} & (n=2k)\end{cases}\end{aligned}$$

(iii) $\{c_n\}$

$$
\begin{aligned}
c_n &= -1 + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(1-\sqrt{2})(-\sqrt{2})^n \\
&= \begin{cases} -1 + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2})^{2k-1} - \frac{1}{4}(1-\sqrt{2})(\sqrt{2})^{2k-1} & (n = 2k-1) \\ -1 + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2})^{2k} + \frac{1}{4}(1-\sqrt{2})(\sqrt{2})^{2k} & (n = 2k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1 + \frac{1}{4}(\sqrt{2})^{2k} & (n = 2k-1) \\ -1 + \frac{1}{2}2^k & (n = 2k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -1 + 2^{k-1} & (n = 2k-1) \\ -1 + 2^{k-1} & (n = 2k) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と表せる.
これらを用いて，合計 $\{k_n\}$ の一般項も求める.
$k_n = a_n + b_n + c_n$ なので

（iv）$\{k_n\}$

$$
\begin{aligned}
k_n &= \begin{cases} 2^k - 1 + 0 + 2^{k-1} & (n = 2k-1) \\ 0 + 2^{k-1} - 1 + 2^{k-1} & (n = 2k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2^k(1 + \frac{1}{4}) - 1 & (n = 2k-1) \\ 2 \cdot 2^{k-1} - 1 & (n = 2k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 5 \cdot 2^{k-2} - 1 & (n = 2k-1) \\ 2^k - 1 & (n = 2k) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と表すことができる.

これらの一般項を用いることで、先ほどの数列の性質の証明を行うこともできる。
このように、数列 $\{k_n\}$ の漸化式が

$$k_{n+1} = ak_n + bk_{n-1} + ck_{n-2}$$

で表され、その特性多項式

$$t^3 = pt^2 + qt + r$$

の固有値が相異なる x, y, z であるとき、α, β, γ を定数として、数列 $\{k_\mathrm{n}\}$ の一般項 k_n は

$$k_\mathrm{n} = x\alpha^\mathrm{n} + y\beta^\mathrm{n} + z\gamma^\mathrm{n}$$

の形で表すことができる。

5 感想

フィボナッチ数列をもとに自分で作った数列が、いくつかの性質を持つことにとても感動した。始めに、フィボナッチ数列が多くの性質を持っていることを知った時、『自分の作ろうとしている数列が、フィボナッチ数列のように性質を持つのだろうか』と不安を感じていたが、作った数列が性質を持っていることを発見してとてもうれしく思った。中でも、ある数列とそれを生成するそれぞれの数列（ここでは $\{k_\mathrm{n}\}$ と $\{a_\mathrm{n}\}, \{b_\mathrm{n}\}, \{c_\mathrm{n}\}$）が、すべて同じ形の漸化式を持つことに非常に驚いた。それぞれの数列は決して似ていないわけではないが、初期値も異なるのになぜだろうと感じていたが、それらの漸化式を初めから導くことで深く理解することができた。そしてそれが今回用いた数列だけでなく、フィボナッチ数列やその他の数列においても言えることを発見した。今回の研究を通して、数列の漸化式の発見だけでなく、数列が行列や固有値など代数学と深く関係していることを知り、数学の面白みを感じることができました。