Euler III 型 超完全数

飯高 茂

平成 32 年 7 月 6 日

1　完全数の超入門

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e q$ は $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす.
$m = 0$ のとき, $\sigma(a) = 2a$ となるが 是を満たす a を完全数という.

2　超完全数

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e$ とおくと $q = \sigma(a) + m$ を満たす.
$\sigma(q) = q + 1 = \sigma(a) + m = 2^{e+1} - 1 + m = 2a + m$ となる.
q の代わりに A を用いると 得られる $A = \sigma(a) + m$,$\sigma(A) = 2a + m$ に注目する.

定義 1

$$\begin{cases} A = \sigma(a) + m \\ \sigma(A) = 2a + m \end{cases} \tag{1}$$

を満たすとき a は 平行移動 m の超完全数, A はそのパートナー と呼ばれる.

$\sigma(a)$ の代わりに $\varphi(a)$ を用いて完全数 または 超完全数 に類似のモノをつくるときオイラー型 完全数 または オイラー型 超完全数と言う.

3　オイラー型 超完全数

整数 m と $e > 0$ について $A = 2^e + 1 + m$ は素数とする. $a = 2^e$ とおくとき $2\varphi(a) = 2^e = a$.
$A = a + 1 + m = 2\varphi(a) + 1 + m$ は素数なので, $\varphi(A) = A - 1 = a + m$.

定義 2

$$\begin{cases} A = 2\varphi(a) + 1 + m \\ \varphi(A) = a + m \end{cases} \tag{2}$$

を満たすとき a は 平行移動 m のオイラー型の超完全数, A はそのパートナー と呼ばれる.

```
m= -2
 &  a  &   &   A(partner)
3  &  メルセンヌ素数  &   &
3  &  3  &  4  &    2^2
7  &  7  &  8  &    2^3
31  &  31  &  32  &    2^5
127  &  127  &  128  &    2^7

m= 0

 &  a  &   &   A(partner)
3  &  フェルマ素数  &   &
3  &  3  &  2  &  2
5  &  5  &  4  &    2^2
17  &  17  &  16  &    2^4
257  &  257  &  256  &    2^8

m= 2
 &  a  &   &   A(partner)
3  &  3  &  0  &  0
5  &  5  &  2  &  2
7  &  7  &  4  &    2^2
11  &  11  &  8  &    2^3
19  &  19  &  16  &    2^4
67  &  67  &  64  &    2^6
131  &  131  &  128  &    2^7
```

m= -5

& a & & A(partner)

8 & 2^3 & 9 & 3^2

& 2^2*p & q & (q=2p+3) 超双子素数

20 & 2^2*5 & 13 & 13

28 & 2^2*7 & 17 & 17

52 & 2^2*13 & 29 & 29

68 & 2^2*17 & 37 & 37

76 & 2^2*19 & 41 & 41

116 & 2^2*29 & 61 & 61

172 & 2^2*43 & 89 & 89

188 & 2^2*47 & 97 & 97

212 & 2^2*53 & 109 & 109

268 & 2^2*67 & 137 & 137

292 & 2^2*73 & 149 & 149

356 & 2^2*89 & 181 & 181

388 & 2^2*97 & 197 & 197

452 & 2^2*113 & 229 & 229

```
 &  a  &   &   A(partner)
m= -3
2  &  2  &  4  &    2^2
 &    2*p   &  q  &  q: q=p+2 (双子素数) 発見 I,証明 Takahashi Hiroto 2016
6  &    2*3   &  5  &  5
10  &    2*5   &  7  &  7
22  &    2*11   &  13  &  13
34  &    2*17   &  19  &  19
58  &    2*29   &  31  &  31
82  &    2*41   &  43  &  43
118  &    2*59   &  61  &  61
142  &    2*71   &  73  &  73
```

```
m= -1
 &  a  &   &   A(partner)
2  &  2  &  2  &  2
4  &    2^2   &  3  &  3
8  &    2^3   &  5  &  5
32  &    2^5   &  17  &  17
512  &    2^9   &  257  &  257
```

Proof

i. $m = 2\mu$ とすると,$a = \varphi(A) - m$ は偶数. $a = 2^e L, (2 \nmid L)$.

$$A = 2\varphi(a) + 1 + m = 2^e\varphi(L) + 1 + 2\mu, \varphi(A) = a + m = 2^e L + 2\mu$$

$$A - \varphi(A) = 2^e(\varphi(L) - L) + 1$$

$\mathrm{co}\varphi(a) = a - \varphi(a)$ (オイラー余関数) を使う.

$$\mathrm{co}\varphi(A) = -2^e(\mathrm{co}\varphi(L)) + 1.$$

$$1 = \mathrm{co}\varphi(A) + 2^e(\mathrm{co}\varphi(L)).$$

$\mathrm{co}\varphi(A) = 1, (A$:素数$)$, $2^e(\mathrm{co}\varphi(L)) = 0; L = 1, a = 2^e$. $A = 2^e + 1 + 2\mu$: 素数.

ii. $m = 2\mu - 1$ とすると,$A = 2\varphi(a) + 1 + m = 2\varphi(a) + 2\mu$: 偶数. $A = 2^e L, (2 \nmid L)$.

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) + \mathrm{co}\varphi(a) = 1 - \mu$$

q.e.d.

4 オイラーII 型 超完全数

梶田光の研究:
整数 m と h: 奇数に対して

定義 3

$$\begin{cases} hA = \varphi(a) - m \\ 2h\varphi(A) = a - m - 1 \end{cases} \tag{3}$$

を満たすとき a は底が h, 平行移動 m のオイラー *II* 型の超完全数, A はそのパートナーと呼ばれる.

注意: $\overline{h} = h - 1$

5 オイラーIII 型 超完全数

整数 m と h: 奇素数に対して,$e, f > 0$ について $q = 2^e h^f + 1 + m$ 素数とする. $a = 2^e h^f$ とおくとき $2h\varphi(a) = \overline{h}2^e h^f = \overline{h}a$.
$\overline{h} = 2k$ すると,$h\varphi(a) = ka$.
$A = 2^e h^f + 1 + m = a + 1 + m$ は素数であり,
$\overline{h}A = \overline{h}2^e h^f + \overline{h}(1 + m) = \overline{h}a + \overline{h}(1 + m) = 2h\varphi(a) + \overline{h}(1 + m)$

よって, $\overline{h}A = 2h\varphi(a) + \overline{h}(1+m)$ によって,

$$kA = h\varphi(a) + k(1+m)$$

一方, $\varphi(A) = 2^e h^f + m = a + m$.

定義 4

$$\begin{cases} kA = h\varphi(a) + k(1+m) \\ \varphi(A) = a + m \end{cases} \tag{4}$$

を満たすとき a は底が h, 平行移動 m のオイラー *III* 型の超完全数, A はそのパートナーと呼ばれる.

$h = 3$ のとき $k = 1$ で定義式は簡単になる.

$$\begin{cases} \text{A}= 3\ \varphi(a) + 1 + m \\ \varphi(A) = a + m \end{cases}$$

定理 1 底が h, 平行移動 m のオイラー *III* 型の超完全数 a,A はパートナー のとき $a = 2^e h^f$ を満たすなら A は 素数. 逆も正しい.

Proof $a = 2^e h^f$ を満たすなら $\varphi(a) = \overline{h}2^{e-1}h^{f-1}$.
よって, $h\varphi(a) = \overline{h}2^{e-1}h^f = ka$.
一方定義により $\varphi(A) = a + m$.
$kA = ka + k(1+m); A = a + 1 + m$
故に $A = a + 1 + m = \varphi(A) + 1$. **q.e.d.**

$h=3, m=-22$ のとき定義方程式は $k=1$ なので,

$$\begin{cases} A=3\varphi(a)-21 \\ \varphi(A)=a-22 \end{cases}$$

表 1: Euler III 型 超完全数 $h = 3$

a	A		
$m = -22$			
	$2^3 * q$		$3^e(q = (3^{e-1} + 11)/4)$
24	$2^3 * 3$	3	3
40	$2^3 * 5$	27	3^3
184	$2^3 * 23$	243	3^5
	$2 * p$		$3^2 * q(p = 3q + 8)$:超双子素数
46	$2 * 23$	45	$3^2 * 5$
58	$2 * 29$	63	$3^2 * 7$
82	$2 * 41$	99	$3^2 * 11$
94	$2 * 47$	117	$3^2 * 13$
118	$2 * 59$	153	$3^2 * 17$
202	$2 * 101$	279	$3^2 * 31$
262	$2 * 131$	369	$3^2 * 41$
274	$2 * 137$	387	$3^2 * 43$
298	$2 * 149$	423	$3^2 * 47$
334	$2 * 167$	477	$3^2 * 53$
382	$2 * 191$	549	$3^2 * 61$
454	$2 * 227$	657	$3^2 * 73$
514	$2 * 257$	747	$3^2 * 83$
622	$2 * 311$	909	$3^2 * 101$
634	$2 * 317$	927	$3^2 * 103$
694	$2 * 347$	$1,017$	$3^2 * 113$
778	$2 * 389$	$1,143$	$3^2 * 127$
802	$2 * 401$	$1,179$	$3^2 * 131$
838	$2 * 419$	$1,233$	$3^2 * 137$
922	$2 * 461$	$1,359$	$3^2 * 151$
958	$2 * 479$	$1,413$	$3^2 * 157$

A は 3 の倍数,a は 2 の倍数 により, $A=3^eL,(3\not|L),a=2^fM,(2\not|M)$ と書けるので

$$A=3^eL=3\varphi(a)-21=3*2^{f-1}\varphi(M)-21$$

により

$$3^eL=3*2^{f-1}\varphi(M)-21$$

が次式になる.

$$3^{e-1}L=2^{f-1}\varphi(M)-7$$

$$\varphi(A)=\varphi(3^eL)=a-22=2^fM-22$$

が次式になる.

$$3^{e-1}\varphi(L)=2^{f-1}M-11$$

2 式を引いて整理する.

$$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=-2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M)+4$$

ゆえに

$$4=3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)+2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M)$$

i. $4=3+1,3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=3,2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M)=1$ のときは
$e=2,\mathrm{co}\varphi(L)=1;f=1,\mathrm{co}\varphi(M)=1$
L,M は素数なので, $q=L,p=M$ とおくとき, $a=2^fM=2p,A=3^eL=3^2q$.
$A=3\varphi(a)-21$ に戻ると, $3^2q=3\varphi(a)-21=3p-3-21$ より
$3q=3\varphi(a)-21=p-8$. $p=3q+8$ は超双子素数.

ii. $4=0+4,3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=0,2^{f-1}\mathrm{co}\varphi(M)=4$ のときは $L=1,A=3^e,f=3,\mathrm{co}\varphi(M)=1,a=2^3M$.
$\varphi(A)=a-22$ に戻ると, $\varphi(A)=2*3^{e-1}=a-22=2^3M-22$.
$3^{e-1}=2^2M-11$.
$M=\frac{3^{e-1}+11}{4}$ の右辺が素数になる指数 e があれば解が定まる.
例
$A=3^5$ のとき, $M=\frac{3^{e-1}+11}{4}=\frac{3^4+11}{4}=92/4=23$, これは素数.

表 2: Euler III 型 超完全数 $h = 3$

a	A		
$m = 0$			
2	2	4	2^2
20	$2^2 * 5$	25	5^2
110	$2 * 5 * 11$	121	11^2
112	$2^4 * 7$	145	$5 * 29$
6	$2 * 3$	7	7
12	$2^2 * 3$	13	13
18	$2 * 3^2$	19	19
36	$2^2 * 3^2$	37	37
72	$2^3 * 3^2$	73	73
96	$2^5 * 3$	97	97
108	$2^2 * 3^3$	109	109
162	$2 * 3^4$	163	163
192	$2^6 * 3$	193	193
432	$2^4 * 3^3$	433	433
486	$2 * 3^5$	487	487
576	$2^6 * 3^2$	577	577
768	$2^8 * 3$	769	769

$h=3, m=0$ の場合の Euler III 型 超完全数 の定義式は次の通り.

$\begin{cases} A = 3\varphi(a)+1 \\ \varphi(A) = a \end{cases}$

ここで, A が素数のときは $a=2^e 3^f$ の形に書ける.

III 型 超完全数 の計算結果から A が素数 q の平方のときが出るのでこれを取り上げる.

$A=q^2$ と仮定したので, $a=\varphi(A)=q*\overline{q}$.

一方, $q^2=A=3\varphi(a)+1$ により, $q^2-1=A=3\varphi(a)$.

$q^2-1=(q+1)\overline{q}, 3\varphi(a)=3\overline{q}\varphi(\overline{q})$.

ゆえに $q+1=3\varphi(\overline{q})$.

そこで次の方程式を考える. x は自然数として

$$x = 3\varphi(x-1)-1.$$

これをタリーズの方程式という.

この解を 100 万以下で求めると $x=2,5,11,71,2591,3359231$.

3359231=47*71473 と分解するが残りの 5 つの解は素数である.

これ以外にタリーズの方程式の解があるかどうか. 多分, わかっていない.

命題 1 奇素数 q がタリーズの方程式の解のとき, $a = q\overline{q}$ とおくと, $A = 3\varphi(a) + 1$ は $A = q^2$ を満たす.

Proof

$$
\begin{aligned}
A &= 3\varphi(a) + 1 \\
&= 3\varphi(q\overline{q}) + 1 \\
&= 3\varphi(q)\varphi(\overline{q}) + 1 \\
&= \varphi(q) * 3\varphi(\overline{q}) + 1 \\
&= \varphi(q) * (q + 1) + 1 \\
&= q^2
\end{aligned}
$$

ゆえに, $A = q^2$ を満たす.
q.e.d.

表 3: Euler III 型 超完全数 $h = 3, m = 0, A$:noprime

a		A	
2	2	4	2^2
20	$2^2 * 5$	25	5^2
110	$2 * 5 * 11$	121	11^2
4970	$2 * 5 * 7 * 71$	5041	71^2
	$2 * 5 * 7 * 37 * 2591$		2591^2
112	$2^4 * 7$	145	$5 * 29$
1300	$2^2 * 5^2 * 13$	1441	$11 * 131$
11200	$2^6 * 5^2 * 7$	11521	$41 * 281$
474880	$2^8 * 5 * 7 * 53$	479233	$113 * 4241$
804100	$2^2 * 5^2 * 11 * 17 * 43$	806401	$431 * 1871$