オイラー型メルセンヌ超完全数

宮本憲一

2024 年 9 月 26 日

オイラー型メルセンヌ超完全数

m だけ平行移動したオイラー型メルセンヌ超完全数
$a = 2^e + m + 1$ を素数と仮定する。$\varphi(a) = 2^e + m$ より $A = \varphi(a) - m$
とおくとき $A = 2^e$ である。$2\varphi(A) = 2^e = A$ より $2\varphi(A) = a - m - 1$
そこで次の定義を得る。
定義）
$A = \varphi(a) - m, 2\varphi(A) = a - m - 1$
を満たす a を m だけ平行移動したオイラー型メルセンヌ超完全数といい、
A をそのパートナーという。
定理 1）
a 素数と A が 2 冪のなることは必要十分条件である。
証明）
a 素数とすれば $\varphi(a) = a - 1$ このとき $A = 2\varphi(A)$ より $A = 2^e$.
逆に $A = 2^e$ ならば $A = 2\varphi(A)$ より $\varphi(a) = a - 1$ から a 素数.
これは所謂先祖返りである。
例）
a 素数とすれば $a = 2^e + 1 + m$ で m が偶数の場合 a は素数になる。
$m = 0$ の場合 a はフェルマー素数であり、$m = -2$ の場合 a はメルセンヌ素数になる。

$A=\varphi(a)$,$2\varphi(A)=a-1$

表 1: $m=0$

a	素因数分解	A	素因数分解
3	3	2	2
5	5	4	2^2
17	17	16	2^4
257	257	256	2^8
65537	65537	65536	2^{16}

$A=\varphi(a)+2$,$2\varphi(A)=a+1$

表 2: $m=-2$

a	素因数分解	A	素因数分解
3	3	4	2^2
7	7	8	2^3
31	31	32	2^5
127	127	128	2^7
8191	8191	8192	2^{13}

$A=\varphi(a)+4$,$2\varphi(A)=a+3$

表 3: $m=-4$

a	素因数分解	A	素因数分解
5	5	8	2^3
13	13	16	2^4
29	29	32	2^5
61	61	64	2^6
509	509	512	2^9
1021	1021	1024	2^{10}
4093	4093	4096	2^{12}
16381	16381	16384	2^{14}

m が負の奇数のとき

定義式）
$A = \varphi(a) - m, 2\varphi(A) = a - m - 1$

$m = -1$ のとき
$A = \varphi(a) + 1, 2\varphi(A) = a$

表 4: $m = -1$

a	素因数分解	A	素因数分解
2	2	2	2
4	2^2	3	3
8	2^3	5	5
32	2^5	17	17
512	2^9	257	257
131072	2^{17}	65537	65537

$A = \varphi(a) + 1, 2\varphi(A) = a$
$a = 2^e$ で A は 2 とフェルマー素数になっている。
a 偶数より $a = 2^e L$（L は奇数）と書ける。
$co\varphi(A) + 2^{e-1} co\varphi(L) = 1$
$co\varphi(L) = 0$ より $L = 1. a = 2^e. co\varphi(A) = 1$ より $A = Q$
$A = Q = 2^{e-1} + 1$ よって A は 2 とフェルマー素数になっている。

$m = -3$ のとき

表 5: $m = -3$

a	素因数分解	A	素因数分解
2	2	4	2^2
6	2*3	5	5
10	2*5	7	7
22	2*11	13	13
34	2*17	19	19
58	2*29	31	31
82	2*41	43	43
118	2*59	61	61
142	2*71	73	73
202	2*101	103	103
214	2*107	109	109
274	2*137	139	139
298	2*149	151	151
358	2*179	181	181
382	2*191	193	193
394	2*197	199	199
454	2*227	229	229
478	2*239	241	241
538	2*269	271	271
562	2*281	283	283
622	2*311	313	313
694	2*347	349	349
838	2*419	421	421
862	2*431	433	433
922	2*461	463	463

$A = \varphi(a) + 3$,$2\varphi(A) = a + 2$
$a = 2^e L$（L は奇数)
$co\varphi(A) + 2^{e-1} co\varphi(L) = 2$
$co\varphi(A) = 2$ かつ $co\varphi(L) = 0$
$A = 4 = 2^2$,$L = 1$ より $a = 2^e$, 定義式に代入すると $4 = 2^{e-1} + 3$ より $e = 1$
よって $a = 2$.
$co\varphi(A) = 1$ かつ $2^{e-1} co\varphi(L) = 1$
$A = Q$ で $e = 1$,$L = p$ つまり $a = 2p$,$A = Q$

定義式に代入すると $Q=(p-1)+3$,$Q=p+2$
(p,Q) は双子素数で $A=Q$ は双子素数の兄。
$co\varphi(A)=0$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=2$
$A=1$,$e=2$,$L=p$ より $a=2^2p$ 定義式に代入すると
$1=2(p-1)+3$,$p=0$ これは矛盾。

$m=-5$ の場合

表 6: $m=-5$

a	素因数分解	A	素因数分解
8	2^3	9	3^2
20	2^2*5	13	13
28	2^2*7	17	17
52	2^2*13	29	29
68	2^2*17	37	37
76	2^2*19	41	41
116	2^2*29	61	61
172	2^2*43	89	89
188	2^2*47	97	97
212	2^2*53	109	109
268	2^2*67	137	137
292	2^2*73	149	149
356	2^2*89	181	181
388	2^2*97	197	197
452	2^2*113	229	229
508	2^2*127	257	257
548	2^2*137	277	277
556	2^2*139	281	281
628	2^2*157	317	317
668	2^2*167	337	337

$A=\varphi(a)+5$,$2\varphi(A)=a+4$
$a=2^eL$(L は奇数) と書ける。
$co\varphi(A)+2^{e-1}co\varphi(L)=3$
$co\varphi(A)=3$ かつ $co\varphi(L)=0$,$L=1$ より $a=2^e$,$A=9=3^2$.
定義式に代入すると $9=2^{e-1}+5$ より $e=3$,$a=2^3$,$A=3^2$.
$co\varphi(A)=1$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=2$ より $e=2$,$co\varphi(L)=1$.
$A=Q$,$a=2^2p$ より定義式に代入すると $Q=2(p-1)+5$,$Q=2p+3$（スーパー双子素数）

$m=-9$ の場合

表 7: $m=-9$

a	素因数分解	A	素因数分解
24	2^3*3	17	17
32	2^5	25	5^2
136	2^3*17	73	73
184	2^3*23	97	97
376	2^3*47	193	193
472	2^3*59	241	241
664	2^3*83	337	337
808	2^3*101	409	409
856	2^3*107	433	433
904	2^3*113	457	457
1192	2^3*149	601	601
1336	2^3*167	673	673
1528	2^3*191	769	769
1864	2^3*233	937	937
2008	2^3*251	1009	1009
2056	2^3*257	1033	1033
2248	2^3*281	1129	1129
2488	2^3*311	1249	1249
3208	2^3*401	1609	1609
3544	2^3*443	1777	1777
3592	2^3*449	1801	1801
3736	2^3*467	1873	1873
4024	2^3*503	2017	2017

$A=\varphi(a)+9$,$2\varphi(A)=a+8$
$a=2^eL$（L は奇数）と書ける。
$co\varphi(A)+2^{e-1}co\varphi(L)=5$
$co\varphi(A)=5$ かつ $co\varphi(L)=0$ のとき $A=25=5^2$,$L=1$ より $a=2^e$
定義式に代入すると $25=2^{e-1}+9$ より $e=5$. よって $a=2^5$,$A=5^2$.
$co\varphi(A)=1$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=4$ より $A=Q$,$e=3$,$L=p$
定義式に代入すると $Q=2^2(p-1)+9$,$a=2^3p$,$A=Q$,$Q=4p+5$(スーパー双子素数）

$m=-17$ の場合

表 8: $m=-17$

a	素因数分解	A	素因数分解
8	2^3	21	3*7
24	2^3*3	25	5^2
68	2^2*17	49	7^2
176	2^4*11	97	97
208	2^4*13	113	113
368	2^4*23	193	193
464	2^4*29	241	241
496	2^4*31	257	257
656	2^4*41	337	337
688	2^4*43	353	353
848	2^4*53	433	433
1136	2^4*71	577	577
1168	2^4*73	593	593
1264	2^4*79	641	641
1328	2^4*83	673	673
1744	2^4*109	881	881
2384	2^4*149	1201	1201
2416	2^4*151	1217	1217
3088	2^4*193	1553	1553
3184	2^4*199	1601	1601
3376	2^4*211	1697	1697
3728	2^4*233	1873	1873

$A=\varphi(a)+17$,$2\varphi(A)=a+16$

$a=2^eL$（L は奇数）と書ける。

$co\varphi(A)+2^{e-1}co\varphi(L)=9$

$co\varphi(A)=1$ かつ $2^{e-1}co\varphi(L)=8$ のとき $A=Q$,$e=4$,$L=p$ より

$a=2^4p$,$A=Q$ 定義式に代入すると $Q=2^3(p-1)+17$ より $Q=8p+9$（スーパー双子素数）

$co\varphi(L)=0$ のとき $co\varphi(A)=9$,$A=21=3*7$,$a=2^e$ より $21=2^{e-1}+17$,$e=3$

$a=2^3$,$A=3*7$

$2^{e-1}co\varphi(L)=4$,$e=3$,$L=p$ このとき $a=2^3p$,$co\varphi(A)=5$,$A=25=5^2$.

定義式に代入すると $25=2^2(p-1)+17$,$p=3$,$a=2^3*3$,$A=25=5^2$.

$2^{e-1}co\varphi(L)=2$ かつ $co\varphi(A)=7$ このとき $e=2$,$L=p$,$A=49=7^2$

定義式に代入すると $49 = 2(p-1) + 17$,$p = 17$,$a = 2^2 * 17$,$A = 49 = 7^2$.

以上は $m=-1-2^\epsilon$ のときオイラー型メルセンヌ超完全数の解が無限個出てくるという予想

を用いた。

$A=\varphi(a)-m$,$2\varphi(A)=a-m-1$ のとき

$A=\varphi(a)+1+2^\epsilon$,$2\varphi(A)=a+2^\epsilon$

$a=2^eL(L$ は奇数）と書ける。これを上式に代入して

$A=2^{e-1}\varphi(L)+1+2^\epsilon$、$\varphi(A)=2^{e-1}L+2^{\epsilon-1}$ より

$co\varphi(A)+2^{e-1}co\varphi(L)=1+2^{\epsilon-1}$

$co\varphi(A)=co\varphi(L)=1$ のより $A=Q$,$L=p$ で $\epsilon=e$

このとき一般解は $Q=2^{e-1}(p-1)+1+2^e=2^{e-1}p+2^{e-1}+1$（$p$,$Q$）はスーパー双子素数.