

フィボナッチ数列のさまざまな一般化

遠藤 有子 , 黒田 美紀 , 真野 恵利

1. 目的

フィボナッチ数列を一般化したある数列の性質をいくつか見出し、それを数学的に証明する.

2. 方法

2.1. フィボナッチ数列による導入.

フィボナッチ数列

$$\{f_n\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots]$$

は次の規則で n 年後の**コドモ**と**オトナ**の合計 f_n として得られる。

- ① **コドモ**は一年後**オトナ**になる。
- ② **オトナ**は一年後**コドモ**を一人生み、そのまま**オトナ**を続ける。
- ③ 一年目は**コドモ**一人、**オトナ** 0 人。

n 年後の**コドモ**の数を g_n 、**オトナ**の数を h_n とし、これらの合計をフィボナッチ数列 f_n とする。

数列 $\{g_n\}, \{h_n\}$ のリストは、以下のようなになる。

$$\{g_n\} = [1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots]$$

$$\{h_n\} = [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots]$$

すると、

- $n + 1$ 年後の**コドモ**の数は n 年後の**オトナ**の数と等しい
- $n + 1$ 年後の**オトナ**の数は n 年後の**コドモ**の数と**オトナ**の数の合計

ことが言える.

このことより,

$$g_{n+1} = h_n$$

$$h_{n+1} = g_n + h_n$$

の漸化式が得られる.

そこで、フィボナッチ数列には以下のような面白い性質がある。

$$\textcircled{1} f_n + f_{n+3} = 2f_{n+2}$$

$$\{f_n\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots]$$

$$\{f_{n+3}\} = [3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots]$$

$$\{f_{n+2}\} = [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots]$$

$$\begin{aligned} 2\{f_{n+2}\} &= 2 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots] \\ &= [4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, \dots] \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} f_n + f_{n+4} = 3f_{n+2}$$

$$\{f_n\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots]$$

$$\{f_{n+4}\} = [5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots]$$

$$\{f_{n+2}\} = [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots]$$

$$\begin{aligned} 3\{f_{n+2}\} &= 3 \cdot [2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots] \\ &= [6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165, 267, 432, \dots] \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \, g_{n+2} + h_n = f_{n+1}$$

$$\{g_{n+2}\} = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots]$$

$$\{h_n\} = [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots]$$

$$\{f_{n+1}\} = [1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots]$$

$$\textcircled{4} \, g_n + 2h_n = f_{n+1}$$

$$\textcircled{5} \, 2g_{n+2} - h_{n+1} = f_n$$

$$\textcircled{6} \, g_{n+2} + h_{n+1} = 2f_n$$

また, g_n, h_n, f_n はそれぞれ次の漸化式を持つ。

$$g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$$

$$h_{n+1} = h_n + h_{n-1}$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

これらは, 初期値は異なるが同じ漸化式である.

このような面白い性質や漸化式の構造を，フィボナッチ数列を一般化したさまざまな数列を用いて研究する．

真野 恵利

2.2. **数列 1**. 規則は次のようになっている。

- ①まず、**子ども**が1人いる。**大人**はいない。
- ②1年たつと、**子ども**は**大人**に成長する。
- ③1年たつと、**大人**は2人の**子ども**を生み、**大人**は**大人**のままでのいる。

子ども $\{a_n\}$ 、大人 $\{b_n\}$ 、総人口 $\{t_n\}$ の関係を表にまとめると次のようになる。

	子ども	大人	総人口
1 年目	1	0	1
2 年目	0	1	1
3 年目	2	1	3
4 年目	2	3	5
5 年目	6	5	11
6 年目	10	11	21
7 年目	22	21	43
8 年目	42	43	85
9 年目	86	85	171
10 年目	170	171	341

総人口をリストとして表示すると、 $[1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341]$ となる。

このリストを1つずつずらし、新たな数列をつくり、それぞれの数列の相互関係を調べていく。

$$\{t_n\} = [1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341] \dots \textcircled{1}$$

$$\{t_{n+1}\} = [1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683] \dots \textcircled{2}$$

$$\{t_{n+2}\} = [3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365] \dots \textcircled{3}$$

$$\{t_{n+3}\} = [5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731] \dots \textcircled{4}$$

$$\{t_{n+4}\} = [11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461] \dots \textcircled{5}$$

$$\{t_{n+5}\} = [21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923] \dots \textcircled{6}$$

これらの数列の相互関係を調べていく。

①と②のリストの和を求めると

[2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]になり、

2で割ると、[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]となり、
 $\{2^{n-1}\}$ の等比数列が出てくる。

すなわち、 $\frac{t_n + t_{n+1}}{2} = 2^{n-1}$

①と④のリストの和を求めると

[6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072]になり、

6で割ると、[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]となり、
 $\{2^{n-1}\}$ の等比数列が出てくる。

すなわち、 $\frac{t_n + t_{n+3}}{6} = 2^{n-1}$

①と⑥のリストの和を求めると

[22, 44, 88, 176, 352, 704, 1408, 2816, 5632, 11264]になり、
11で割ると、[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]となり、
 $\{2^{n-1}\}$ の等比数列が出てくる。

すなわち、 $\frac{t_n + t_{n+5}}{11} = 2^{n-1}$

2.3. **証明の準備**. この数列の満たす漸化式を導く。

$$a_1 = 1, b_1 = 0$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

より、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

がわかる。

そこで、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

おけば、

$$\mathbf{u}_{n+1} = A\mathbf{u}_n = A^n \mathbf{u}_1$$

2 次行列 A についてのケイリー・ハミルトンの公式

$$A^2 = \text{Tr}(A)A - \det(A)E$$

より、これに右から u_n をかけて

$$A^2 u_n = \text{Tr}(A)A u_n - \det(A)u_n$$

よって

$$u_{n+2} = \text{Tr}(A)u_{n+1} - \det(A)u_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

により、 $\text{Tr}(A)=1$, $\det A=-2$ なので次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \cdots (1)$$

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \cdots (2)$$

ここで、 a_n について考える。

$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ において、公比を t とし、 $a_n = t^n$ としてみる。

$$t^n = pt^{n-1} + qt^{n-2}$$

$$t^2 = pt + q \text{ (特性方程式)}$$

根 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ とすると、一般解は、 A, B を定数として、

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n \text{ としてえられる。}$$

この場合、 $p = 1, q = 2$ となるので、

$$t^2 = t + 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t = 2, -1$$

3. 考察

次に証明をする。

ここで、 $\{t_n\}=[1,1,3,5,11,21,43,85,171,341]$

$\{t_{n+3}\}=[5,11,21,43,85,171,341,683,1365,2731]$

より、 $s_n = t_n + t_{n+3}$ とする。

$$s_1 = 6, s_2 = 12$$

$$s_n = A2^n + B(-1)^n$$

$n = 1$ のとき、 $s_1 = 2A - B$

$$2A - B = 6 \cdots \textcircled{1}$$

$n = 2$ のとき、 $s_2 = 4A + B$

$$4A + B = 12 \cdots \textcircled{2}$$

①、②より $A = 3, B = 0$ となる。

よって、 $s_n = 3 \cdot 2^n$ が求められる。

このことより、 $\frac{1}{6}s_n = 2^{n-1}$ が求められ、
上記の性質が正しいことが示せた。

次に、(1),(2)のように3項間の漸化式が求められたので、固有多項式について考える。

$$(1) \text{ は、 } a_n - \text{Tr}(A)a_{n-1} - \det(A)a_{n-2} = 0$$

と書き換えられる。これは固有多項式

$$\varphi_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A)$$

と似た関係になっている。

このことから、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ、同じ漸化式を満たすことがわかった。

4. やや複雑な数列

次にやや複雑な数列について考える。規則は次のようになっている。

- ① 1年目は、子どもが1人いるだけ。
- ② 1年たつと、子どもは大人に成長する。
- ③ 1年たつと、大人は2人の子どもを生み、大人は更年期になり子どもを生まなくなる。
- ④ 1年たつと、更年期から老人へとなる。その間に、子どもは大人になる。
- ⑤ 1年たつと老人は亡くなる。

子ども $\{a_n\}$ 、大人 $\{b_n\}$ 、更年期 $\{c_n\}$ 、老人 $\{d_n\}$ 、総人口 $\{t_n\}$
の関係を表にまとめると次のようになる。

	子ども	大人	更年期	老人	総人口
1 年目	1	0	0	0	1
2 年目	0	1	0	0	1
3 年目	2	0	1	0	3
4 年目	0	2	0	1	3
5 年目	4	0	2	0	6
6 年目	0	4	0	2	6
7 年目	8	0	4	0	12
8 年目	0	8	0	4	12

総人口をリストとして表示すると、 $[1,1,3,3,6,6,12,12,24,24]$ となる。

このリストを1つずつずらし、新たな数列をつくり、それぞれの数列の相互関係を調べていく。

$$\{t_n\}=[1,1,3,3,6,6,12,12,24,24]\cdots \textcircled{1}$$

$$\{t_{n+1}\}=[1,3,3,6,6,12,12,24,24,48]\cdots \textcircled{2}$$

$$\{t_{n+2}\}=[3,3,6,6,12,12,24,24,48,48]\cdots \textcircled{3}$$

$$\{t_{n+3}\}=[3,6,6,12,12,24,24,48,48,96]\cdots \textcircled{4}$$

$$\{t_{n+4}\}=[6,6,12,12,24,24,48,48,96,96]\cdots \textcircled{5}$$

$$\{t_{n+5}\}=[6,12,12,24,24,48,48,96,96,192]\cdots \textcircled{6}$$

これらの数列の相互関係を調べていく。

③と⑤のリストの和を求めると

[9, 9, 18, 18, 36, 36, 72, 72, 144, 144]になり、

9で割ると [1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16] となり、

$\{2^n\}$ の等比数列が 2 個ずつ出てくる。

4.1. **漸化式**. この数列の漸化式を考える。

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, d_1 = 0$$

$a_{n+1} = 2b_n, b_{n+1} = a_n, c_{n+1} = b_n, d_{n+1} = c_n$ より、行列でかけば、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

となる。

そこで、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。

Aの固有多項式は、

$$\varphi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t & -2 & 0 & 0 \\ -1 & t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t(t^3 - 2t) = t^2(t^2 - 2)$$

$t = 0$ (重解), $\pm\sqrt{2}$

固有値は $0, \pm\sqrt{2}$ である。

3つの固有値は異なるから、一般項の a_n は

$$a_n = A(\sqrt{2})^n + B(-\sqrt{2})^n + Cn$$

とかける。初期値の値より、

$$a_1 \text{ のとき } 1 = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B + C \dots 1$$

$$a_2 \text{ のとき } 0 = 2A + 2B + 2C \dots 2$$

$$a_3 \text{ のとき } 2 = 2\sqrt{2}A + 2\sqrt{2}B + 3C \dots 3$$

①、②、③より、 $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 、 $B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 、 $C = 0$ をえる。

よって、 $a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^n$ をえる。

$n = 2m$ (偶数)のときを考えてみると次のようになる。

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{2m} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{2m}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}2^{m-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}2^{m-1}$$

$$= 0$$

$n = 2m + 1$ (奇数)のときを考えると次のようになる。

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{2m-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{2m-1}$$

$$= 2^{m-1} + 2^{m-1}$$

$$= 2^m$$

同様にすれば、 a_n, b_n, c_n の一般項が求められる。