

数学の研究をはじめよう

モンスターの完全数

その2

飯高 茂

平成 31 年 1 月 28 日

目次

- 1 $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$ のモンスターの完全数 1
- 2 $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスターの完全数 6

1 $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$ のモンスターの完全数

$P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$ のモンスターの完全数を調べる.

表 1: $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$. モンスターの完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -20$			
577440	$2^5 * 3^2 * 5 * 401$	1944708	$2^2 * 3 * 162059$
414312	$2^3 * 3 * 61 * 283$	1025760	$2^5 * 3 * 5 * 2137$
158820	$2^2 * 3 * 5 * 2647$	414144	$2^6 * 3^2 * 719$
40890	$2 * 3 * 5 * 29 * 47$	72960	$2^8 * 3 * 5 * 19$
1733910	$2 * 3 * 5 * 29 * 1993$	4276320	$2^5 * 3 * 5 * 59 * 151$
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	16896	$2^9 * 3 * 11$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	66048	$2^9 * 3 * 43$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	164352	$2^9 * 3 * 107$
261888	$2^8 * 3 * 11 * 31$	754176	$2^9 * 3 * 491$
1047552	$2^{10} * 3 * 11 * 31$	3113472	$2^9 * 3 * 2027$

表 2: $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -18$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$	8	$2^9 * 3 * q$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	19968	$2^9 * 3 * 13$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	167424	$2^9 * 3 * 109$
1047552	$2^{10} * 3 * 11 * 31$	3116544	$2^9 * 3 * 2029$
$m = -16$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
6	$2^e * 3 * 11 * 31$	2	$2^9 * 3 * q$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	72192	$2^9 * 3 * 47$
130944	$2^7 * 3 * 11 * 31$	367104	$2^9 * 3 * 239$
	$2^e * 3 * 5 * 1283$		$2^5 * 3 * 11 * q$
76980	$2^2 * 3 * 5 * 1283$	191136	$2^5 * 3 * 11 * 181$
99624	$2^3 * 3 * 7 * 593$	260544	$2^6 * 3 * 23 * 59$
233244	$2^2 * 3^2 * 11 * 19 * 31$	674304	$2^9 * 3 * 439$
546744	$2^3 * 3 * 11 * 19 * 109$	1559424	$2^7 * 3 * 31 * 131$
$m = -14$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	26112	$2^9 * 3 * 17$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	173568	$2^9 * 3 * 113$
130944	$2^7 * 3 * 11 * 31$	370176	$2^9 * 3 * 241$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$	1549824	$2^9 * 3 * 1009$

$a = 2^e * 3 * 11 * 31, A = 2^9 * 3 * q, (q: \text{素数})$, となる解について調べる.

$\alpha = 3 * 11 * 31$ とおくととき, $\alpha_1 = \sigma(3 * 11 * 31) = 4 * 12 * 32 = 2^9 * 3$ に注意して $a = 2^e * \alpha, \sigma(a) = N\alpha_1, (N = 2^{e+1} + 1)$.

$$A = \sigma(a) + \sigma(\alpha)m = N\alpha_1 + m\alpha_1 = \alpha_1(N + m).$$

$A = 2^9 * 3 * q = \alpha_1 q$ なので $\alpha_1(N + m) = \alpha_1 q$. よって, $q = N + m$.

したがって, q は平行移動 m のメルセンヌ素数.

この逆を次の形で示す.

命題 1 $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$, 平行移動 m の モンスター的完全数の解として $a = 2^e * 3 * 11 * 31$ があるとする. $A = \sigma(a) + \sigma(\alpha)m = N\alpha_1 + m\alpha_1 = \alpha_1(N + m)$ とかける.

$Q = N + m$ が 6 と互いに素とする. Q は $\alpha_1 = 2^9 * 3$ と互いに素になる. $\sigma(A) = 2\beta a + m\alpha\beta = 2^{e+1}\alpha\beta + m\alpha\beta = ((N + 1) + m)\alpha\beta = (Q + 1)\alpha\beta$ なので

$$A = \alpha_1 Q \text{ により } \sigma(A) = \sigma(\alpha_1 Q) = \sigma(\alpha_1)\sigma(Q) = 8\alpha\sigma(Q).$$

$8\alpha\sigma(Q) = \beta = (Q + 1)\alpha\beta$ によって, $\sigma(Q) = Q + 1$. Q は素数.

$P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$, 平行移動 m の モンスター的完全数の解 $a = 2^e * 3 * 11 * 31, A = 2^9 * 3 * q, (q : \text{素数})$ は普遍解である.

表 3: $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -12$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$	8	$2^9 * 3 * q$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	29184	$2^9 * 3 * 19$
261888	$2^8 * 3 * 11 * 31$	766464	$2^9 * 3 * 499$
233244	$2^2 * 3^2 * 11 * 19 * 31$	680448	$2^9 * 3 * 443$
1112562	$2 * 3^3 * 11 * 1873$	2680128	$2^6 * 3^4 * 11 * 47$
$m = -10$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
8184	$2^3 * 3 * 11 * 31$	7680	$2^9 * 3 * 5$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	81408	$2^9 * 3 * 53$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$	1555968	$2^9 * 3 * 1013$
$m = -8$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
8184	$2^3 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	35328	$2^9 * 3 * 23$
261888	$2^8 * 3 * 11 * 31$	772608	$2^9 * 3 * 503$
1047552	$2^{10} * 3 * 11 * 31$	3131904	$2^9 * 3 * 2039$
17952	$2^5 * 3 * 11 * 17$	42144	$2^5 * 3 * 439$
1313532	$2^2 * 3^2 * 11 * 31 * 107$	3761664	$2^9 * 3 * 31 * 79$
80070	$2 * 3 * 5 * 17 * 157$	192480	$2^5 * 3 * 5 * 401$
$m = -6$			
8184	$2^3 * 3 * 11 * 31$	13824	$2^9 * 3^3$
233244	$2^2 * 3^2 * 11 * 19 * 31$	689664	$2^9 * 3 * 449$

表 4: $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -4$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$	4	$2^9 * 3 * q$
8184	$2^3 * 3 * 11 * 31$	16896	$2^9 * 3 * 11$
130944	$2^7 * 3 * 11 * 31$	385536	$2^9 * 3 * 251$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$	1565184	$2^9 * 3 * 1019$
22836	$2^2 * 3 * 11 * 173$	52320	$2^5 * 3 * 5 * 109$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	90624	$2^9 * 3 * 59$
70896	$2^4 * 3 * 7 * 211$	204160	$2^7 * 5 * 11 * 29$
132696	$2^3 * 3^2 * 19 * 97$	376056	$2^3 * 3^3 * 1741$
$m = 0$			
	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196584	$2^3 * 3 * 8191$
983040	$2^{16} * 3 * 5$	3145704	$2^3 * 3 * 131071$
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 37 * 7$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1468160	$2^8 * 5 * 31 * 37$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6014720	$2^8 * 5 * 37 * 127$
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	47616	$2^9 * 3 * 31$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	195072	$2^9 * 3 * 127$
710400	$2^8 * 3 * 5^2 * 37$	2407832	$2^3 * 7 * 19 * 31 * 73$
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$

2 $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

表 5: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -4$			
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	520960	$2^8 * 5 * 11 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	2794240	$2^8 * 5 * 37 * 59$
3728256	$2^7 * 3 * 7 * 19 * 73$	11887360	$2^8 * 5 * 37 * 251$
$m = -2$			
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$	4	$2^8 * 5 * 37 * q$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	615680	$2^8 * 5 * 13 * 37$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1373440	$2^8 * 5 * 29 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	2888960	$2^8 * 5 * 37 * 61$

表 6: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 0$			
	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196584	$2^3 * 3 * 8191$
983040	$2^{16} * 3 * 5$	3145704	$2^3 * 3 * 131071$
3932160	$2^{18} * 3 * 5$	12582888	$2^3 * 3 * 524287$
	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	47616	$2^9 * 3 * 31$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	195072	$2^9 * 3 * 127$
4190208	$2^{12} * 3 * 11 * 31$	12581376	$2^9 * 3 * 8191$
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 7 * 37$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1468160	$2^8 * 5 * 31 * 37$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6014720	$2^8 * 5 * 37 * 127$
710400	$2^8 * 3 * 5^2 * 37$	2407832	$2^3 * 7 * 19 * 31 * 73$

表 7: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 2$			
29127	$3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	805120	$2^8 * 5 * 17 * 37$
3728256	$2^7 * 3 * 7 * 19 * 73$	12171520	$2^8 * 5 * 37 * 257$
$m = 4$			
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 7 * 37$
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	520960	$2^8 * 5 * 11 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	899840	$2^8 * 5 * 19 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	3173120	$2^8 * 5 * 37 * 67$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6204160	$2^8 * 5 * 37 * 131$