数学の研究をはじめよう
モンスター的 完全数
その 1

飯高 茂

平成 31 年 1 月 24 日

目 次

1 ある読者から

雑誌『現代数学』の読者である西山輝夫さんからある指摘を受けそれが元になって モンスター的完全数の概念ができるに至った.

はじめに $(2,k)$ スーパー完全数, すなわち $\sigma^2(a) = ka$ を満たす a の数表を示す.

$k = 2$ のときは元祖スーパー完全数で, a が偶数なら $a = 2^e$ で $q = 2a - 1$ は素数になる (D.Suryanaryana.) したがって ここでは除外する.

表 1: $(2,k)$ スーパー完全数; $\sigma^2(a) = ka, k = 3, k = 2s, s \geq 2$

α	素因数分解	$\alpha_1 = \sigma(\alpha)$	素因数分解	$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$	素因数分解
$k = 3$					
8	2^3	15	$3 * 5$	24	$2^3 * 3$
512	2^9	1023	$3 * 11 * 31$	1536	$2^9 * 3$
21	$3 * 7$	32	2^5	63	$3^2 * 7$
$k = 4$					
15	$3 * 5$	24	$2^3 * 3$	60	$2^2 * 3 * 5$
1023	$3 * 11 * 31$	1536	$2^9 * 3$	4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$
29127	$3 * 7 * 19 * 73$	47360	$2^8 * 5 * 37$	116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$
$k = 6$					
160	$2^5 * 5$	378	$2 * 3^3 * 7$	960	$2^6 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$	96	$2^5 * 3$	252	$2^2 * 3^2 * 7$
84	$2^2 * 3 * 7$	224	$2^5 * 7$	504	$2^3 * 3^2 * 7$
336	$2^4 * 3 * 7$	992	$2^5 * 31$	2016	$2^5 * 3^2 * 7$
1344	$2^6 * 3 * 7$	4064	$2^5 * 127$	8064	$2^7 * 3^2 * 7$
86016	$2^{12} * 3 * 7$	262112	$2^5 * 8191$	516096	$2^{13} * 3^2 * 7$
$k = 8$					
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$	480	$2^5 * 3 * 5$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$	1920	$2^7 * 3 * 5$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$	7680	$2^9 * 3 * 5$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196584	$2^3 * 3 * 8191$	491520	$2^{15} * 3 * 5$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$	32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	47616	$2^9 * 3 * 31$	130944	$2^7 * 3 * 11 * 31$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	195072	$2^9 * 3 * 127$	523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$	466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 7 * 37$	932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$

この表を観察する.

$k = 6$ の場合の素因数分解を見る. 最初の $a = 160 = 2^5 * 5$ を例外として無視するとその他の a の素因子は $2, 3, 7$ で構成されていることが分かる. しかもこの 3,7 は $k = 3$ の

場合にでている $a = 21 = 3 * 7$ が種となっているようだ.

$\alpha = 2^e * 3 * 7$ であり, $p = 2^{e+1} - 1 = \sigma(2^e)$ が素数とすれば, $\alpha_1 = \sigma(\alpha) = \sigma(2^e * 3 * 7) = 32 * p$.

さらに

$$\sigma(\alpha_1) = \sigma^2(\alpha) = \sigma^2(2^e * 3 * 7) = \sigma(32 * p) = 63 * (p+1) = 7 * 3^2 * 2 * 2^e = 6 * 3 * 7 * 2^e = 6\alpha.$$

$p = 2^{e+1} - 1$ が素数なので, $e = 1, 2, 4, 6, 12$.

ここで除外されている $e = 5$ を試すと, $2^6 - 1 = 63 = 3^2 * 7$. $\alpha = 2^5 * 3 * 7$ とおくとき, $\alpha_1 = \sigma(2^5 * 3 * 7) = \sigma(32 * 3 * 7) = 63 * 4 * 8 = 2^5 * 3^2 * 7$. $\alpha_2 = \sigma(\alpha_1) = 8 * 13 * 21 * 3$.

$4\alpha_2 = \sigma(\alpha_1) = 2^5 * 13 * 21 * 339\alpha$.

$\alpha = 2^5 * 3 * 5$ とおくとき, $\alpha_1 = \sigma(2^5 * 3 * 5) = \sigma(32 * 3 * 5) = 63 * 4 * 6 = 2^3 * 3^3 * 7$.

$$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1) = 15 * 40 * 8 = 2^6 * 3 * 5^2 = 10 * 2^5 * 2 * 5 = 10\alpha.$$

しかし $k = 8$ の場合, a の素因数分解を見ると事態はだいぶ複雑である.

3 種類から構成されているようだ. この 3 種類は $k = 4$ の場合にある 3 個の解が種の役割をしている.

表 2: $(2, k)$ スーパー完全数; $\sigma^2(a) = ka, k = 3, k = 2s, s \geq 2$

α	素因数分解	$\alpha_1 = \sigma(\alpha)$	素因数分解	$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$	素因数分解
$k = 10$					
13824	$2^9 * 3^3$	40920	$2^3 * 3 * 5 * 11 * 31$	138240	$2^{10} * 3^3 * 5$
480	$2^5 * 3 * 5$	1512	$2^3 * 3^3 * 7$	4800	$2^6 * 3 * 5^2$
504	$2^3 * 3^2 * 7$	1560	$2^3 * 3 * 5 * 13$	5040	$2^4 * 3^2 * 5 * 7$
32256	$2^9 * 3^2 * 7$	106392	$2^3 * 3 * 11 * 13 * 31$	322560	$2^{10} * 3^2 * 5 * 7$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	96768	$2^9 * 3^3 * 7$	327360	Z
1980342	W	5621760	$2^{11} * 3^2 * 5 * 61$	19803420	A
$k = 12$					
2200380	V	7870464	$2^{11} * 3^2 * 7 * 61$	26404560	$2^4 * 3^2 * 5 * 7 * 13^2 * 31$

$W = 2 * 3^3 * 7 * 13^2 * 31$

$V = 2^2 * 3 * 5 * 7 * 13^2 * 31$

$Z = 2^6 * 3 * 5 * 11 * 31$

$A = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 13^2 * 31$

$k = 10$ を超えるとかなり複雑になっている.

$k=3$ での解を参考に $\alpha=21$ とおくとき, $\alpha_2=\sigma^2(\alpha)=63=3^2*7=3\alpha$ となる.
$a_e=\alpha 2^e$ とおく. $N=\sigma(2^e)=2^{e+1}-1$ を素数 (メルセンヌ素数) と仮定する.

$$\begin{aligned}\sigma(a_e)&=\sigma(\alpha 2^e)\\&=\sigma(\alpha)\sigma(2^e)\\&=\alpha_1 N.\end{aligned}$$

$\alpha_1=32$ と 素数 N は互いに素なので

$$\begin{aligned}\sigma^2(a_e)&=\sigma(\alpha_1 N)\\&=\alpha_2\sigma(N)\\&=3\alpha*(N+1)\\&=3\alpha*2^{e+1}=6a_e.\end{aligned}$$

このようにして, $N=2^{e+1}-1$ が素数なら $\sigma^2(a)=6a$ を満たす a_e ができた. N はいわゆるメルセンヌ素数なのでたくさんあり, かくして $\sigma^2(a)=6a$ を満たす解 a が量産できたことになる.

$k=6$ の数表で, α_1 の素因数分解を眺めると 3,7,31,127,8192 はみなメルセンヌ素数である.

古代ギリシャ時代にユークリッドが指摘したように, $N=2^{e+1}-1$ が素数なら $a=2^eN$ はユークリッド完全数である.2018 年現在, 元祖完全数は 50 個発見されている.

元祖完全数を平行移動させるには, パラメータ m をとり, $q=2^{e+1}-1+m$ を素数と仮定する.

$a=2^eq$ を考えると, $\sigma(a)=2a-m$ を満たす.

かくして得られた a についての式 $\sigma(a)=2a-m$ を方程式と見てこの解を 平行移動 m の完全数と定義した. このような完全数の一般化は結果的には驚くほど豊かな収穫をもたらした.

そこで柳の木の下にいるかもしれない 2 匹目の泥鰌を探そう.

2　最初の平行移動

パラメータ m をとり, $q = 2^{e+1} - 1 + m$ を素数と仮定し, $\alpha = 21$ に対して $\alpha_1 = \sigma(\alpha) = 32$,$a_e = \alpha 2^e$ とおく.

$$\sigma(a_e) = \sigma(\alpha)\sigma(2^e) = \alpha_1(2^{e+1} - 1) = \alpha_1(q - m) = \alpha_1 q - \alpha_1 m.$$

かくして $\sigma(a_e) + \alpha_1 m = \alpha_1 q$.

$A = \sigma(a_e) + \alpha_1 m = \sigma(a_e) + 32m$ とおくと $A = \alpha_1 q = 32q$ となる.

一方 $\alpha_2 = \sigma(\alpha_1) = 3\alpha, a_e = \alpha 2^e$ なので $\beta = 3$ とおくとき $\alpha_2 = \beta\alpha$ であり

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma(\alpha_1)\sigma(q) = \alpha_2(q + 1) \\
&= 3\alpha(2^{e+1} + m) \\
&= 3\alpha 2^{e+1} + 3\alpha m \\
&= 6a + 3\alpha m \\
&= 6a + 63m. \qquad =
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sigma(A) = 6a + 63m.$$

かくして $A = \sigma(a_e) + 32m, \sigma(A) = 6a_e + 63m$ をえる.

3　$\alpha = 21, \beta = 3$ のモンスター的 完全数

そこで a_e のことを忘却の彼方におき, $A = \sigma(a) + 32m, \sigma(A) = 6a + 63m$ を自然数 (a, A) に関しての連立方程式とみなす.

これを満たす自然数 (a, A) を詳しく研究することが当面の課題である.

それにしても, この連立方程式は見かけがごつい.

実はこれがもっとも簡単な場合なので, この複雑な式は研究ができるかどうか正直のところ不安いっぱいであった.

ともかく 見かけがごついので式をモンスター的 完全数の定義方程式. この解を モンスター的 完全数ということにした. 詳しくは $\alpha = 21, \beta = 3$ のモンスター的 完全数という.

不安な気持ちをかかえつつ, 平行移動のパラメータ m をいろいろ変化させてパソコンで解を求めてみると優美な形の解が多く出てきた. とくに $m = -12$ の場合に美しい解ができたことは想定外のことであった.

表 3: $\alpha = 21, \beta = 3$ モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -12$			
1146	$2 * 3 * 191$	1920	$2^7 * 3 * 5$
1686	$2 * 3 * 281$	3000	$2^3 * 3 * 5^3$
606	$2 * 3 * 101$	840	$2^3 * 3 * 5 * 7$
2406	$2 * 3 * 401$	4440	$2^3 * 3 * 5 * 37$
2766	$2 * 3 * 461$	5160	$2^3 * 3 * 5 * 43$
3846	$2 * 3 * 641$	7320	$2^3 * 3 * 5 * 61$
4206	$2 * 3 * 701$	8040	$2^3 * 3 * 5 * 67$
4566	$2 * 3 * 761$	8760	$2^3 * 3 * 5 * 73$
4926	$2 * 3 * 821$	9480	$2^3 * 3 * 5 * 79$
6366	$2 * 3 * 1061$	12360	$2^3 * 3 * 5 * 103$
7806	$2 * 3 * 1301$	15240	$2^3 * 3 * 5 * 127$
9606	$2 * 3 * 1601$	18840	$2^3 * 3 * 5 * 157$
12846	$2 * 3 * 2141$	25320	$2^3 * 3 * 5 * 211$
14646	$2 * 3 * 2441$	28920	$2^3 * 3 * 5 * 241$
16446	$2 * 3 * 2741$	32520	$2^3 * 3 * 5 * 271$

$m = -12$ のとき, $a = 6p, (p:$ 素数$), A = 2^3 * 3 * 5 * q = 120q, (q:$ 素数$)$, という解が発見された.

$A = \sigma(a) + 32m = 12(p+1) - 32 * 12 = 12(p-31), A = 120q$ によると $p - 31 = 10q$. すなわち $(q, p = 10q + 31)$ はスーパー双子素数.

命題 1 $(q, p = 10q+31)$ がスーパー双子素数なら, $a = 6p$ は $\alpha = 21, \beta = 3$ のモンスター的完全数.

Proof.

$A = \sigma(a) + 32m = 12(p+1) - 32 * 12 = 12(p-31) = 120q$. $120, q$ は互いに素と仮定すると $\sigma(A) = \sigma(120q) = 360(q+1)$.

一方, $6a + 63m = 36p - 63 * 12 = 36(p - 31 + 10) = 36(10q + 10) = 360(q+1)$.

よって $\sigma(A) = 6a + 63m$ を確認できた.

End.

命題 2 $a = 6p$ は $\alpha = 21, \beta = 3$ のモンスター的完全数 と仮定しさらに
$p - 31 = 10Q$ とかけて 21 と Q は互いに素とすると, Q は素数.

Proof.

$A = \sigma(a) + 32m = 12(p+1) - 32 * 12 = 12(p-31) = 120Q$,

$\sigma(A) = \sigma(120)\sigma(Q) = 360\sigma(Q)$.

$6a+63m=36p-63*12=36(p-21)=36(p-31+10)=36(10Q+10)=360(Q+1)$ なので仮定により $\sigma(A)=6a+63m$ なので, $360\sigma(Q)=360(Q+1)$. よって, $\sigma(Q)=Q+1$ となり Q は素数.

注意 1 21 と Q は互いに素という仮定は安易なのでより弱い仮定で結果を出すことが望ましい.

注意 2 $A=2^3*3*5*q$ という形ではない 解がある.

$a=1146=2*3*191, A=1920=2^7*3*5$,

$a=1686=2*3*281, A=3000=2^3*3*5^3$

もある. これらは $A=120q$ がある意味で退化して $q=2^4, q=5^3$ となった場合であり擬素数とみなせるであろう.

表 4: $\alpha = 21, \beta = 3, m = -12$ のモンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
	$2^e * 3 * 7$	32q	$2^5 * q$
168	$2^3 * 3 * 7$	96	$2^5 * 3$
336	$2^4 * 3 * 7$	608	$2^5 * 19$
5376	$2^8 * 3 * 7$	15968	$2^5 * 499$
86016	$2^{12} * 3 * 7$	261728	$2^5 * 8179$
不規則形			
8526	$2 * 3 * 7^2 * 29$	20136	$2^3 * 3 * 839$
4788	$2^2 * 3^2 * 7 * 19$	14176	$2^5 * 443$
27468	$2^2 * 3^2 * 7 * 109$	79696	$2^4 * 17 * 293$

$m = -12$ の場合には $a = 2^e * 3 * 7, A = 2^5 * q$ の形の解もある.
$N = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ とおく.
$A = \sigma(a) + 32m = \sigma(21 * 2^e) + 32m = 32(N + m)$.
$Q = N + m$ とけば $A = 32Q. A = 2^5 * q$ を仮定したので $Q = q$ は素数.
$\sigma(A) = \sigma(32Q) = 63(q + 1)$ を検証しよう. $Q = N + m = N - 12$.
$\sigma(A) = 6a + 63m$ を確認するために,
$6a + 63m = 6 * 21 * 2^e - 63 * 12 = 63(2^{e+1} - 12) = 63(2^{e+1} - 13 + 1) = 63(q + 1)$ により $\sigma(A) = 6a + 63m$.
$q = N + m = 2^{e+1} - 1 - 12$ は $m = -12$ だけ平行移動したメルセンヌ素数である.
この他の解は $a = 4788 = 2^2 * 3^2 * 7 * 19, A = 2^5 * 443$ であり不規則形と考えられる.

表 5: $\alpha = 21, \beta = 3$; $m = -10$ の モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
1380	$2^2 * 3 * 5 * 23$	3712	$2^7 * 29$
1128	$2^3 * 3 * 47$	2560	$2^9 * 5$
	$2^e * 3 * 7$		$2^5 * q$
168	$2^3 * 3 * 7$	160	$2^5 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$	1696	$2^5 * 53$
10752	$2^9 * 3 * 7$	32416	$2^5 * 1013$
	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * q$
120	$2^3 * 3 * 5$	40	$2^3 * 5$
240	$2^4 * 3 * 5$	424	$2^3 * 53$
480	$2^5 * 3 * 5$	1192	$2^3 * 149$
3840	$2^8 * 3 * 5$	11944	$2^3 * 1493$
15360	$2^{10} * 3 * 5$	48808	$2^3 * 6101$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196264	$2^3 * 24533$
122880	$2^{13} * 3 * 5$	392872	$2^3 * 49109$

$A = \sigma(a) + 32m, \sigma(A) = 6a + 63m$, $m = -10$ のとき
1). $a = 2^e * 15, A = 8Q$ (Q:素数) という解を探す.
$\sigma(a) = 24N, (N = 2^{e+1} - 1), A = 24N - 320 = 8Q, Q = 3N - 40 = 3 * 2^{e+1} - 43.$
$\sigma(A) = \sigma(8Q) = 15(Q + 1) = 45(N - 13).$
一方,

$$6a + 63m = 6 * 2^e * 15 - 630 = 6 * 2^e * 15 - 630 = 45(2^{e+1} - 14) = 45(N - 13).$$

よって, $\sigma(A) = 6a + 63m$ が示された.

2). $a = 2^e * 21, A = 32Q$ を満たす解を探す.
$\sigma(21) = 32$ により $\sigma(a) = 32N, (N = 2^{e+1} - 1), A = \sigma(a) + 32m = 32N - 320 = 32Q$ により $Q = N - 10$.
$Q = N - 10 = 2^{e+1} - 11$ は奇数なので $\sigma(A) = \sigma(32Q) = 63\sigma(Q)$,
一方 $6a + 63m = 6 * 2^e * 21 \quad - 630 = 63(2^{e+1} - 10) = 63(N - 9) = 63(Q + 1)$ により $\sigma(Q) = Q + 1$. よって Q は素数.

注意 3 $N = 2^{e+1} - 1, Q = kN - m$: 素数 のとき,a を乗数 k, 平行移動 m のメルセンヌ素数という. あるいはスーパーメルセンヌ素数ともいう.

スーパーメルセンヌ素数により解が記述できるのがモンスター的完全数の著しい性質である.

表 6: $\alpha=21, \beta=3, m=-48, 46, 44$; モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-48$			
2424	$2^3*3*101$	4584	$2^3*3*191$
26916	$2^2*3*2243$	61296	$2^4*3*1277$
198324	$2^2*3^2*7*787$	572128	$2^5*19*941$
2664	2^3*3^2*37	5874	$2*3*11*89$
	2^e*3*7		2^5*q
1344	2^6*3*7	2528	2^5*79
5376	2^8*3*7	14816	2^5*463
21504	$2^{10}*3*7$	63968	2^5*1999
$m=-46$			
16170	$2*3*5*7^2*11$	47776	2^5*1493
4788	2^2*3^2*7*19	13088	2^5*409
180768	$2^5*3*7*269$	542848	2^7*4241
	2^e*3*7		2^5*q
672	2^5*3*7	544	2^5*17
10752	2^9*3*7	31264	2^5*977
43008	$2^{11}*3*7$	129568	2^5*4049
49959	$3^2*7*13*61$	88800	2^5*3*5^2*37
$m=-44$			
	2^e*3*7		2^5*q
672	2^5*3*7	608	2^5*19
1344	2^6*3*7	2656	2^5*83
2688	2^7*3*7	6752	2^5*211
5376	2^8*3*7	14944	2^5*467
21504	$2^{10}*3*7$	64096	2^5*2003
43008	$2^{11}*3*7$	129632	2^5*4051
86016	$2^{12}*3*7$	260704	2^5*8147
172032	$2^{13}*3*7$	522848	$2^5*16339$
5796	2^2*3^2*7*23	16064	2^6*251
166992	2^4*3*7^2*71	507488	$2^5*15859$

解を観察すると $N=2^{e+1}-1$,$a=21*2^e, A=2^5q, (q:$ 素数$)$ の解が目立つのである.

このとき, $\sigma(a)=\sigma(21)*\sigma(2^e)=32N$ となり, 定義式 $A=\sigma(a)+32m, \sigma(A)=6a+63m$ より

$A=\sigma(a)+32m=32N+32m=32(N+m)$ となる. $Q=N+m$ とおくと, $A=32Q$.

$\sigma(A)=\sigma(32Q)=63\sigma(Q)$.

一方,

$$\begin{aligned}6a+63m &= 6*21*2^e+63m\\ &= 63*2^{e+1}+63m\\ &= 63(2^{e+1}-1+1+m)\\ &= 63(N+1+m)=63(Q+1)\end{aligned}$$

したがって,

$$6a+63m=63(Q+1).$$

ここで, Q を素数とすると $\sigma(A)=\sigma(32Q)=63\sigma(Q)=63(Q+1)=6a+63m$.

命題 3 $a=21*2^e$ とし $N=2^{e+1}-1, Q=N+m$ とおくと, Q が素数ならば, $\sigma(A)=6a+63m$ を満たす. 言い換えると a は $\alpha=21, \beta=3$ のモンスター的完全数.

この逆も成り立ち,
$a=21*2^e$ が $\alpha=21, \beta=3$ のモンスター的完全数なら,$Q=N+m$ は素数になる.

モンスター的完全数から離れて一般に $Q=2^{e+1}-1+m$ が素数になる e, m, Q に興味を持つにいたる.

- $m=0$ なら $Q=2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数,
- $m=2$ なら $Q=2^{e+1}+1$ はフェルマ素数 である.

これはとくに言うまでもない.
$Q=2^{e+1}-1+m$ が素数になるとき Q を m だけ平行移動したメルセンヌ素数と呼ぶことにしたい.
$a=21*2^e$,$A=32Q$ となる解を $21*2^e-32Q$ 型の解という.

表 7: $m = -48, 46, 44$; m だけ平行移動したメルセンヌ素数

$m = -48$	
e	$Q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数
6	79
8	463
10	1999
14	32719
16	131023
24	33554383
$m = -46$	
e	$Q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数
5	17
9	977
11	4049
$m = -44$	
e	$Q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数
5	19
6	83
7	211
8	467
10	2003
11	4051
12	8147
13	16339
18	524243
25	67108819

$A = \sigma(a) + 32m, \sigma(A) = 6a + 63m$, $m = -2$ のとき

$A = \sigma(a) - 64, \sigma(A) = 6a - 126$.

1) $a = 2^e * 21, A = 32Q$.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおくと, $\sigma(a) = \sigma(2^e * 21) = N * 32$ により, $A = 32N - 64 = 32Q$. よって,$Q = N - 2 = 2^{e+1} - 3$.

3.1 平行移動 $m = -2$ の一般メルセンヌ素数

2) $a = 2^e * 21, A = 32Q$.

表 8: $\alpha = 21, \beta = 3$,$m = -2$ の モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
88032	$2^5 * 3 * 7 * 131$	266048	$2^6 * 4157$
166992	$2^4 * 3 * 7^2 * 71$	508832	$2^5 * 15901$
	$2^e * 3 * 7$		$2^5 * q$
84	$2^2 * 3 * 7$	160	$2^5 * 5$
168	$2^3 * 3 * 7$	416	$2^5 * 13$
336	$2^4 * 3 * 7$	928	$2^5 * 29$
672	$2^5 * 3 * 7$	1952	$2^5 * 61$
5376	$2^8 * 3 * 7$	16288	$2^5 * 509$
10752	$2^9 * 3 * 7$	32672	$2^5 * 1021$
43008	$2^{11} * 3 * 7$	130976	$2^5 * 4093$
172032	$2^{13} * 3 * 7$	524192	$2^5 * 16381$

表 9: $Q = N - 2 = 2^{e+1} - 3$

e	$N - 2 = 2^{e+1} - 3$	素因数分解	素数
2	5	5	5
3	13	13	13
4	29	29	29
5	61	61	61
6	125	5^3	
7	253	$11 * 23$	
8	509	509	509
9	1021	1021	1021
10	2045	$5 * 409$	
11	4093	4093	4093
12	8189	$19 * 431$	
13	16381	16381	16381
14	32765	$5 * 6553$	
15	65533	$13 * 71^2$	
16	131069	$53 * 2473$	
17	262141	$11 * 23831$	
18	524285	$5 * 23 * 47 * 97$	
19	1048573	1048573	1048573

4 モンスターの卵

一般に 自然数 α について $\sigma^2(\alpha)$ が α の倍数になる場合を考える．すなわち自然数 β があり, $\sigma^2(\alpha) = \alpha\beta$ となると仮定する．さらに α が奇数と仮定する．このような α をモ

ンスターの卵という.

さて, $N = 2^{e+1} - 1$ は素数と仮定し, $a_e = \alpha 2^e$ とおく.

$\sigma(a_e) = \sigma(\alpha)\sigma(2^e) = \sigma(\alpha)N$, $\sigma(\alpha)$ は N で割れないと仮定しておく.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(a_e) &= \sigma(\sigma(\alpha)N) \\
&= \sigma^2(\alpha)(N+1) \\
&= \alpha\beta(2^{e+1}) \\
&= 2\beta\alpha 2^e \\
&= 2\beta a_e.
\end{aligned}
$$

よって, $\sigma^2(a_e) = 2\beta a_e$.

$N = 2^{e+1} - 1$ は素数と仮定したがこのような素数はメルセンヌ素数なのだから数多くあると思われる. 実際に 50 個発見されている.

$\sigma^2(\alpha) = \beta\alpha$ となり,α が奇数ならメルセンヌ素数 $N = 2^{e+1} - 1$ をとると $a_e = \alpha 2^e$ は $\sigma^2(a_e) = 2\beta a_e$ を満たす.

表 10: モンスターの卵;$\sigma^2(\alpha) = \beta\alpha$, ここで α:奇数

α		$\alpha_1 = \sigma(\alpha)$		$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$		β
15	$3 * 5$	24	$2^3 * 3$	60	$2^2 * 3 * 5$	4
21	$3 * 7$	32	2^5	63	$3^2 * 7$	3
1023	$3 * 11 * 31$	1536	$2^9 * 3$	4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	4
29127	$3 * 7 * 19 * 73$	47360	$2^8 * 5 * 37$	116508	X	4
550095	W	1124352	$2^{11} * 3^2 * 61$	3300570	Y	6

$W = 3 * 5 * 7 * 13^2 * 31$
$X = 2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$
$Y = 2 * 3^2 * 5 * 7 * 13^2 * 31$

5　モンスター的完全数の平行移動

平行移動のパラメータ m をとり $N = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定する. $a_e = \alpha 2^e$ は どんな方程式を満たすであろうか.

$\sigma(a_e) = \sigma(\alpha)\sigma(2^e) = \sigma(\alpha)(2^{e+1} - 1)$, なので, $N - m = 2^{e+1} - 1$ を代入し

$$\sigma(a_e) = \sigma(\alpha)(2^{e+1} - 1) = \sigma(\alpha)(N - m) = \sigma(\alpha)N - \sigma(\alpha)m.$$

よって, $\sigma(a_e) + \sigma(\alpha)m = \sigma(\alpha)N$

$A = \sigma(a_e) + \sigma(\alpha)m$ とおきこれをパートナという. $\sigma(A) = \sigma(\sigma(\alpha)N)$ をえる.

ここで $\sigma(\alpha)$ は N で割れないと仮定しておく.

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma(\sigma(\alpha)N) \\
&= \sigma^2(\alpha)\sigma(N) \\
&= \alpha\beta(N + 1) \\
&= \alpha\beta(2^{e+1} + m) \\
&= 2\beta 2^e \alpha + m\alpha \\
&= 2\beta a_e + m\alpha\beta.
\end{aligned}$$

従って, モンスターの卵 α に対して a_e は $A = \sigma(a) + \sigma(\alpha)m$ とおくとき次式を満たす.

$\sigma(A) = m\alpha\beta + 2\beta a$.

この式を満たす a を平行移動 m のモンスター的完全数 (monster like perfect number with translation parameter m) という.

6　$\alpha = 15, \beta = 4$ のモンスター的完全数

モンスターの卵 $\alpha = 15$ のとき $\beta = 4$.
$A = \sigma(a) + \sigma(\alpha)m = \sigma(a) + 24m$,
$\sigma(A) = m\alpha\beta + 2\beta a = 8a + 60m$
始めに解の表を調べる.

表 11: $\alpha = 15, \beta = 4$ モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -1$			
$m = 0$			
84	$2^2 * 3 * 7$	224	$2^5 * 7$
160	$2^5 * 5$	378	$2 * 3^3 * 7$
	$2^e * 3 * 7$		$2^5 * q$
42	$2 * 3 * 7$	96	$2^5 * 3$
336	$2^4 * 3 * 7$	992	$2^5 * 31$
1344	$2^6 * 3 * 7$	4064	$2^5 * 127$
86016	$2^{12} * 3 * 7$	262112	$2^5 * 8191$
$m = 1$			
672	$2^5 * 3 * 7$	2048	2^{11}
3990	$2 * 3 * 5 * 7 * 19$	11552	$2^5 * 19^2$
53676	$2^2 * 3^3 * 7 * 71$	161312	$2^5 * 71^2$

表 12: $P=2, \alpha=15, \beta=4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-14$			
	2^e*3*5		2^3*3*q
	2^e*3*5		2^3*3*q
240	2^4*3*5	408	2^3*3*17
960	2^6*3*5	2712	$2^3*3*113$
1920	2^7*3*5	5784	$2^3*3*241$
7680	2^9*3*5	24216	$2^3*3*1009$
$m=-12$			
	2^e*3*5		2^3*3*q
240	2^4*3*5	456	2^3*3*19
3840	2^8*3*5	11976	$2^3*3*499$
810	$2*3^4*5$	1890	$2*3^3*5*7$
1350	$2*3^3*5^2$	3432	$2^3*3*11*13$
3420	2^2*3^2*5*19	10632	$2^3*3*443$

7 普遍解

ここのケースを見ると, $a=2^e*15, A=24q, (q:$ 素数$)$ という形の解が多いことに驚かされる.

$a=2^e*15, A=24q$ が 解になることを証明する.

$\sigma(a)=24N, (N=2^{e+1}-1)$ により $A=\sigma(a)+24m=24(N+m)$. $A=24q$ を仮定しているので, $q=N+m$.

$q, 24$ を互いに素と仮定する. $\sigma(A)=\sigma(24q)=60(q+1)$ となる.

一方, $8a+60m=2^{e+3}*15+60m=2^{e+3}*15+60m=2^{e+1}*60+60m=60(N+1+m)=60(q+1)$.

よって, $\sigma(A)=8a+60m$.

これは m によらない解である. よってこれを普遍解という.

一般に普遍解を発見することは大きな課題と考えてよい.

表 13: $P=2, \alpha=15, \beta=4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-10$			
普遍解	$2^e*3*5=15*2^e$		$2^3*3*q=24q$
120	2^3*3*5	120	2^3*3*5
480	2^5*3*5	1272	2^3*3*53
7680	2^9*3*5	24312	$2^3*3*1013$
	2^3*3*p		2^e*3*5
168	2^3*3*7	240	2^4*3*5
264	2^3*3*11	480	2^5*3*5
456	2^3*3*19	960	2^6*3*5
1608	2^3*3*67	3840	2^8*3*5
3144	$2^3*3*131$	7680	2^9*3*5
1020	$2^2*3*5*17$	2784	2^5*3*29
$m=-8$			
	2^e*3*5		2^3*3*q
120	2^3*3*5	168	2^3*3*7
240	2^4*3*5	552	2^3*3*23
3168	2^5*3^2*11	9636	$2^2*3*11*73$
3840	2^8*3*5	12072	$2^3*3*503$
$m=-6$			
120	2^3*3*5	216	2^3*3^3
2184	$2^3*3*7*13$	6576	$2^4*3*137$
3420	2^2*3^2*5*19	10776	$2^3*3*449$
$m=-5$			
270	$2*3^3*5$	600	2^3*3*5^2
1500	2^2*3*5^3	4248	2^3*3^2*59
$m=-4$			
普遍解	2^e*3*5		$2^3*3*q=24q$
120	2^3*3*5	264	2^3*3*11
480	2^5*3*5	1416	2^3*3*59
1920	2^7*3*5	6024	$2^3*3*251$
7680	2^9*3*5	24456	$2^3*3*1019$
2580	$2^2*3*5*43$	7296	2^7*3*19
3630	$2*3*5*11^2$	9480	$2^3*3*5*79$
3810	$2*3*5*127$	9120	$2^5*3*5*19$

表 14: $P = 2, \alpha = 15, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -2$			
普遍解	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	120	$2^3 * 3 * 5$
120	$2^3 * 3 * 5$	312	$2^3 * 3 * 13$
240	$2^4 * 3 * 5$	696	$2^3 * 3 * 29$
480	$2^5 * 3 * 5$	1464	$2^3 * 3 * 61$
3840	$2^8 * 3 * 5$	12216	$2^3 * 3 * 509$
7680	$2^9 * 3 * 5$	24504	$2^3 * 3 * 1021$
$m = 0$			
普遍解	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$

8 $P=2, \alpha=1023, \beta=4$ のモンスター的完全数

$P=2, \alpha=1023, \beta=4$ のモンスター的完全数を調べる.

表 15: $P=2, \alpha=1023, \beta=4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-20$			
577440	$2^5*3^2*5*401$	1944708	$2^2*3*162059$
414312	$2^3*3*61*283$	1025760	$2^5*3*5*2137$
40890	$2*3*5*29*47$	72960	$2^8*3*5*19$
1733910	$2*3*5*29*1993$	4276320	$2^5*3*5*59*151$
158820	$2^2*3*5*2647$	414144	2^6*3^2*719
普遍解	$2^e*3*11*31$		2^9*3*q
16368	$2^4*3*11*31$	16896	2^9*3*11
32736	$2^5*3*11*31$	66048	2^9*3*43
65472	$2^6*3*11*31$	164352	$2^9*3*107$
261888	$2^8*3*11*31$	754176	$2^9*3*491$
1047552	$2^{10}*3*11*31$	3113472	$2^9*3*2027$

表 16: $P=2,\alpha=1023,\beta=4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-18$			
普遍解	$2^e*3*11*31$	8	2^9*3*q
16368	$2^4*3*11*31$	19968	2^9*3*13
65472	$2^6*3*11*31$	167424	$2^9*3*109$
1047552	$2^{10}*3*11*31$	3116544	$2^9*3*2029$
$m=-16$			
普遍解	$2^e*3*11*31$		2^9*3*q
6	$2^e*3*11*31$	2	2^9*3*q
32736	$2^5*3*11*31$	72192	2^9*3*47
130944	$2^7*3*11*31$	367104	$2^9*3*239$
	$2^e*3*5*1283$		$2^5*3*11*q$
76980	$2^2*3*5*1283$	191136	$2^5*3*11*181$
99624	$2^3*3*7*593$	260544	$2^6*3*23*59$
233244	$2^2*3^2*11*19*31$	674304	$2^9*3*439$
546744	$2^3*3*11*19*109$	1559424	$2^7*3*31*131$
$m=-14$			
普遍解	$2^e*3*11*31$		2^9*3*q
16368	$2^4*3*11*31$	26112	2^9*3*17
65472	$2^6*3*11*31$	173568	$2^9*3*113$
130944	$2^7*3*11*31$	370176	$2^9*3*241$
523776	$2^9*3*11*31$	1549824	$2^9*3*1009$

$a=2^e*3*11*31, A=2^9*3*q, (q:$ 素数$)$, となる解について調べる.

$\alpha=3*11*31$ とおくとき,$\alpha_1=\sigma(3*11*31)=4*12*32=2^9*3$ に注意して $a=2^e*\alpha, \sigma(a)=N\alpha_1, (N=2^{e+1}+1)$.

$$A=\sigma(a)+\sigma(\alpha)m=N\alpha_1+m\alpha_1=\alpha_1(N+m).$$

$A=2^9*3*q=\alpha_1 q$ なので $\alpha_1(N+m)=\alpha_1 q$. よって, $q=N+m$.

したがって, q は平行移動 m のメルセンヌ素数.

この逆を次の形で示す.

命題 4 $P=2,\alpha=1023,\beta=4$, 平行移動 m の モンスター的完全数の解として $a=2^e*3*11*31$ があるとする. $A=\sigma(a)+\sigma(\alpha)m=N\alpha_1+m\alpha_1=\alpha_1(N+m)$ とかける.

$Q=N+m$ が 6 と互いに素とする.Q は $\alpha_1=2^9*3$ と互いに素になる. $\sigma(A)=2\beta a+m\alpha\beta=2^{e+1}\alpha\beta+m\alpha\beta=((N+1)+m)\alpha\beta=(Q+1)\alpha\beta$ なので

$A=\alpha_1 Q$ により $\sigma(A)=\sigma(\alpha_1 Q)=\sigma(\alpha_1)\sigma(Q)=8\alpha\sigma(Q)$.

$8\alpha\sigma(Q)=\beta=(Q+1)\alpha\beta$ によって, $\sigma(Q)=Q+1$. Q は素数.

$P=2, \alpha=1023, \beta=4,$ 平行移動 m の モンスター的完全数の解 $a=2^e*3*11*31, A=2^9*3*q, (q:$ 素数$)$ は普遍解である.

表 17: $P=2, \alpha=1023, \beta=4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=-12$			
普遍解	$2^e*3*11*31$	8	2^9*3*q
16368	$2^4*3*11*31$	29184	2^9*3*19
261888	$2^8*3*11*31$	766464	$2^9*3*499$
233244	$2^2*3^2*11*19*31$	680448	$2^9*3*443$
1112562	$2*3^3*11*1873$	2680128	$2^6*3^4*11*47$
$m=-10$			
普遍解	$2^e*3*11*31$		2^9*3*q
8184	$2^3*3*11*31$	7680	2^9*3*5
32736	$2^5*3*11*31$	81408	2^9*3*53
523776	$2^9*3*11*31$	1555968	$2^9*3*1013$
$m=-8$			
普遍解	$2^e*3*11*31$		2^9*3*q
8184	$2^3*3*11*31$	10752	2^9*3*7
16368	$2^4*3*11*31$	35328	2^9*3*23
261888	$2^8*3*11*31$	772608	$2^9*3*503$
1047552	$2^{10}*3*11*31$	3131904	$2^9*3*2039$
17952	$2^5*3*11*17$	42144	$2^5*3*439$
1313532	$2^2*3^2*11*31*107$	3761664	$2^9*3*31*79$
80070	$2*3*5*17*157$	192480	$2^5*3*5*401$
$m=-6$			
8184	$2^3*3*11*31$	13824	2^9*3^3
233244	$2^2*3^2*11*19*31$	689664	$2^9*3*449$

表 18: $P = 2, \alpha = 1023, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -4$			
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$	4	$2^9 * 3 * q$
8184	$2^3 * 3 * 11 * 31$	16896	$2^9 * 3 * 11$
130944	$2^7 * 3 * 11 * 31$	385536	$2^9 * 3 * 251$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$	1565184	$2^9 * 3 * 1019$
22836	$2^2 * 3 * 11 * 173$	52320	$2^5 * 3 * 5 * 109$
32736	$2^5 * 3 * 11 * 31$	90624	$2^9 * 3 * 59$
70896	$2^4 * 3 * 7 * 211$	204160	$2^7 * 5 * 11 * 29$
132696	$2^3 * 3^2 * 19 * 97$	376056	$2^3 * 3^3 * 1741$
$m = 0$			
	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196584	$2^3 * 3 * 8191$
983040	$2^{16} * 3 * 5$	3145704	$2^3 * 3 * 131071$
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 37 * 7$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1468160	$2^8 * 5 * 31 * 37$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6014720	$2^8 * 5 * 37 * 127$
普遍解	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	47616	$2^9 * 3 * 31$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	195072	$2^9 * 3 * 127$
710400	$2^8 * 3 * 5^2 * 37$	2407832	$2^3 * 7 * 19 * 31 * 73$
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$

9 $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

表 19: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -4$			
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	520960	$2^8 * 5 * 11 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	2794240	$2^8 * 5 * 37 * 59$
3728256	$2^7 * 3 * 7 * 19 * 73$	11887360	$2^8 * 5 * 37 * 251$
$m = -2$			
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$	4	$2^8 * 5 * 37 * q$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	615680	$2^8 * 5 * 13 * 37$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1373440	$2^8 * 5 * 29 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	2888960	$2^8 * 5 * 37 * 61$

表 20: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 0$			
	$2^e * 3 * 5$		$2^3 * 3 * q$
60	$2^2 * 3 * 5$	168	$2^3 * 3 * 7$
240	$2^4 * 3 * 5$	744	$2^3 * 3 * 31$
960	$2^6 * 3 * 5$	3048	$2^3 * 3 * 127$
61440	$2^{12} * 3 * 5$	196584	$2^3 * 3 * 8191$
983040	$2^{16} * 3 * 5$	3145704	$2^3 * 3 * 131071$
3932160	$2^{18} * 3 * 5$	12582888	$2^3 * 3 * 524287$
	$2^e * 3 * 11 * 31$		$2^9 * 3 * q$
4092	$2^2 * 3 * 11 * 31$	10752	$2^9 * 3 * 7$
16368	$2^4 * 3 * 11 * 31$	47616	$2^9 * 3 * 31$
65472	$2^6 * 3 * 11 * 31$	195072	$2^9 * 3 * 127$
4190208	$2^{12} * 3 * 11 * 31$	12581376	$2^9 * 3 * 8191$
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 7 * 37$
466032	$2^4 * 3 * 7 * 19 * 73$	1468160	$2^8 * 5 * 31 * 37$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6014720	$2^8 * 5 * 37 * 127$
710400	$2^8 * 3 * 5^2 * 37$	2407832	$2^3 * 7 * 19 * 31 * 73$

表 21: $P = 2, \alpha = 29127, \beta = 4$. モンスター的完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 2$			
29127	$3 * 7 * 19 * 73$	142080	$2^8 * 3 * 5 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	805120	$2^8 * 5 * 17 * 37$
3728256	$2^7 * 3 * 7 * 19 * 73$	12171520	$2^8 * 5 * 37 * 257$
$m = 4$			
58254	$2 * 3 * 7 * 19 * 73$	331520	$2^8 * 5 * 7 * 37$
	$2^e * 3 * 7 * 19 * 73$		$2^8 * 5 * 37 * q$
116508	$2^2 * 3 * 7 * 19 * 73$	520960	$2^8 * 5 * 11 * 37$
233016	$2^3 * 3 * 7 * 19 * 73$	899840	$2^8 * 5 * 19 * 37$
932064	$2^5 * 3 * 7 * 19 * 73$	3173120	$2^8 * 5 * 37 * 67$
1864128	$2^6 * 3 * 7 * 19 * 73$	6204160	$2^8 * 5 * 37 * 131$

10　底が一般の場合, モンスターの卵

一般に 自然数 α について 底が 素数 P　のとき $\sigma^2(\alpha)$ が α の倍数になる場合を考える. すなわち自然数 β があり, $\sigma^2(\alpha) = \alpha\beta$ となると仮定する.

さらに底が 素数 P　のとき α が P で割れないと仮定する. このような α をやはりモンスターの卵という.

表 22: $P = 3$, モンスターの卵

α	$factor$	$\alpha_1 = \sigma(\alpha)$	$factor$		$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$	β
2	2	3	3	4	2^2	2
4	2^2	7	7	8	2^3	2
8	2^3	15	$3*5$	24	2^3*3	3
16	2^4	31	31	32	2^5	2
64	2^6	127	127	128	2^7	2
160	2^5*5	378	$2*3^3*7$	960	2^6*3*5	6
512	2^9	1023	$3*11*31$	1536	2^9*3	3
4096	2^{12}	8191	8191	8192	2^{13}	2
47360	2^8*5*37	116508	X	331520	$2^8*5*7*37$	7
65536	2^{16}	131071	131071	131072	2^{17}	2
262144	2^{18}	524287	524287	524288	2^{19}	2
331520	$2^8*5*7*37$	932064	Y	2983680	Z	9
343976	$2^3*19*31*73$	710400	2^8*3*5^2*37	2407832	W	7

$X = 2^2*3*7*19*73$
$Y = 2^5*3*7*19*73$
$Z = 2^8*3^2*5*7*37$
$W = 2^3*7*19*31*73$

表 23: $P = 5$, モンスターの卵

α	$factor$	$\alpha_1 = \sigma(\alpha)$	$factor$		$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$	β
2	2	3	3	4	2^2	2
4	2^2	7	7	8	2^3	2
8	2^3	15	$3*5$	24	2^3*3	3
16	2^4	31	31	32	2^5	2
21	$3*7$	32	2^5	63	3^2*7	3
24	2^3*3	60	2^2*3*5	168	2^3*3*7	7
42	$2*3*7$	96	2^5*3	252	2^2*3^2*7	6
64	2^6	127	127	128	2^7	2
84	2^2*3*7	224	2^5*7	504	2^3*3^2*7	6
168	2^3*3*7	480	2^5*3*5	1512	2^3*3^3*7	9
336	2^4*3*7	992	2^5*31	2016	2^5*3^2*7	6
504	2^3*3^2*7	1560	$2^3*3*5*13$	5040	2^4*3^2*5*7	10
512	2^9	1023	$3*11*31$	1536	2^9*3	3
1023	$3*11*31$	1536	2^9*3	4092	$2^2*3*11*31$	4
1344	2^6*3*7	4064	2^5*127	8064	2^7*3^2*7	6
1536	2^9*3	4092	$2^2*3*11*31$	10752	2^9*3*7	7
4092	$2^2*3*11*31$	10752	2^9*3*7	32736	$2^5*3*11*31$	8
4096	2^{12}	8191	8191	8192	2^{13}	2
10752	2^9*3*7	32736	$2^5*3*11*31$	96768	2^9*3^3*7	9
13824	2^9*3^3	40920	$2^3*3*5*11*31$	138240	$2^{10}*3^3*5$	10
16368	$2^4*3*11*31$	47616	2^9*3*31	130944	$2^7*3*11*31$	8
29127	$3*7*19*73$	47360	2^8*5*37	116508	$2^2*3*7*19*73$	4

11　底が一般の場合, モンスター的完全数の定義

$q = \sigma(P^e) + m = \dfrac{P^{e+1} - 1}{\overline{P}} + m$ は素数と仮定し, $a_e = \alpha P^e$ とおく.

$\sigma(a_e) = \sigma(\alpha)\sigma(P^e) = \sigma(\alpha)(q - m)$, $\sigma(\alpha)$ は q で割れないと仮定しておく.

$\sigma(a_e) + \sigma(\alpha)m = \sigma(\alpha)q$ となるので, $A = \sigma(a_e) + \sigma(\alpha)m$ とおきこれを a_e のパートナーという.

$A = \sigma(\alpha)q$ になる. そこで $\sigma(\alpha), q$ は互いに素と仮定する.

$\sigma(A) = \sigma^2(\alpha)(q + 1) = \alpha\beta(q + 1)$ になりこれに $\overline{P}$ を掛けると

$$\overline{P}\sigma(A) = \alpha\beta(\overline{P}q + \overline{P}).$$

$\overline{P}q + \overline{P} = P^{e+1} + P - 2 + \overline{P}m$ によって,

$$\overline{P}\sigma(A) = \alpha\beta(P^{e+1} + P - 2 + \overline{P}m) = P\beta a_e + \alpha\beta(P - 2 + \overline{P}m).$$

そこで一般にし $A = \sigma(a) + \sigma(\alpha)m$ とおき $\overline{P}\sigma(A) = P\beta a + \alpha\beta(P - 2 + \overline{P}m)$ と組にして a, A の満たす連立方程式とみなしこの解を底が P の場合, 平行移動 m のモンスター的完全数という.