(A,B,C) 完全数 2

飯高 茂

平成 31 年 10 月 29 日

1 (A,B,C) 完全数

新しく始めた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化するとその本質が露わになることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

2 固有完全数

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a=kp$:B 型解) とする.

$$
\begin{aligned}
A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp \\
&= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p + A\sigma(k)-B\varphi(k) \\
&= D
\end{aligned}
$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=kp$ と書けるとき 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよびそれ以外をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すことがすることが基本的課題である.

一般に与えられた定数項 D に対して (A,B,C) 完全数を求めることは特別な場合以外には難しい.

正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

ここでは, 固有完全数が固有値にあたりと 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 底が一般の至高の完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という.

$m,e>0$ を与えて, $q=\sigma(P^e)+m$ を素数と仮定する. $a=P^eq$ を底 P をもつ狭義の完全数という.

$q=\sigma(P^e)+m$ を変形して, $\overline{P}(q-m)+1=P^{e+1}$.

$\sigma(a) = \sigma(P^e)\sigma(q) = \dfrac{(P^{e+1}-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$\begin{aligned}
\overline{P}\sigma(a) &= \overline{P}\sigma(P^e)\sigma(q) \\
&= (P^{e+1}-1)(q+1) \\
&= aP - q + P^{e+1} - 1 \\
&= aP - q - 1 + \overline{P}(q-m) + 1 \\
&= aP - m\overline{P} + q(P-2).
\end{aligned}$$

かくして $\overline{P}\sigma(a) = aP - m\overline{P} + q(P-2)$ を得るので, $L = \overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P}$ とおくと, $L = q(P-2)$. 書き換えて, $q = \dfrac{L}{P-2}$.

$a = P^e q$ のオイラー関数を計算する.

$$\begin{aligned}
P\varphi(a) &= P\varphi(P^e q) \\
&= \overline{P}P^e(q-1) \\
&= \overline{P}P^e q - \overline{P}P^e \\
&= \overline{P}a - \overline{P}P^e
\end{aligned}$$

により,

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - \overline{P}P^e.$$

さらに P をかけて $\overline{P}(q-m) + 1 = P^{e+1}$ を用いると

$$P^2\varphi(a) = P\overline{P}a - \overline{P}P^{e+1} = P\overline{P}a - \overline{P}(\overline{P}(q-m)+1).$$

これより

$$P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P} = -\overline{P}^2(q-m).$$

$K = P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P}$ とおくとき $-K = \overline{P}^2(q-m)$.

よって, $q = m - \dfrac{K}{\overline{P}^2}$. $q = \dfrac{L}{P-2}$ と組み合わせて

$$q = m - \frac{K}{\overline{P}^2} = \frac{m\overline{P}^2 - K}{\overline{P}^2} = \frac{L}{P-2}.$$

これより

$$(m\overline{P}^2 - K)(P-2) = L\overline{P}^2.$$

$L = \overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P}, K = P^2\varphi(a) - P\overline{P}a + \overline{P}$ を代入すると

$$L\overline{P}^2 = (\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 = (P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P}).$$

$$(\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 = (P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P})$$

を

$$(\overline{P}\sigma(a) - aP + m\overline{P})\overline{P}^2 - ((P-2)(m\overline{P}^2 - P^2\varphi(a) + P\overline{P}a - \overline{P}) = 0$$

に直して, 左辺を $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の形に整理する.

$A = \overline{P}^3$ は $\sigma(a)$ の係数,$B = (P-2)P^2$ は $\varphi(a)$ の係数, $C = P\overline{P}^2 + (P-2)P\overline{P} = P(P-1)(2P-3)$ は $-a$ の係数,
定数項は

$$\begin{aligned} D &= -m\overline{P}^3 + (P-2)(m\overline{P}^2 - \overline{P}) \\ &= -\overline{P}(m\overline{P}^2 + (P-2)(m\overline{P} - 1) \\ &= -\overline{P}(m\overline{P} + (P-2)) \end{aligned}$$

$$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D.$$

この解を至高の完全数 (supreme perfect numbers) と呼ぶ.

表 1: $P = 3, 5, 7$

P	A	B	C	D
2	1	0	2	$-m$
3	8	9	18	$-2(2m+1)$
5	64	75	140	$-4(4m+3)$
7	216	245	462	$-6(6m+5)$

表 2: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -18$	
255	$3 * 5 * 17$
57615	$3 * 5 * 23 * 167$
87237	$3^5 * 359$
$m = -14$	
46449	$3^2 * 13 * 397$

表 3: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -12$	
8	2^3
$m = -10$	
999	$3^3 * 37$
18291	$3 * 7 * 13 * 67$
$m = -6$	
6	$2 * 3$
99	$3^2 * 11$
285	$3 * 5 * 19$
6417	$3^2 * 23 * 31$
46917	$3^2 * 13 * 401$
76461	$3 * 7 * 11 * 331$
$m = -2$	
4	2^2
75	$3 * 5^2$

表 4: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = 0$	
10	$2 * 5$
322	$2 * 7 * 23$
$m = 2$	
117	$3^2 * 13$
$m = 4$	
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
$m = 6$	
5	5
14	$2 * 7$
15	$3 * 5$
231	$3 * 7 * 11$
1107	$3^3 * 41$

表 5: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = 8$	
7	7
$m = 10$	
7353	$3^2 * 19 * 43$
47853	$3^2 * 13 * 409$
$m = 12$	
11	11
$m = 14$	
13	13
21	$3 * 7$
1161	$3^3 * 43$
89181	$3^5 * 367$

4　固有完全数

固有完全数 $k_0 = 10, 322 = 2 * 7 * 23$.

i. $k_0 = 10$ のとき

$A = 8, B = 9, C = 18$ により $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0) = 18*10 - 2*9\varphi(10) = 6*18 = 108$.

ii. $k_0 = 322$ のとき

$A = 8, B = 9, C = 18$ により $D_0 = Ck_0 - 2B\varphi(k_0) = 18 * 322 - 2 * 9\varphi(322) = 18(322 - 6 * 22) = 18 * 190 = 3420$.

表 6: $P = 3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m = -108$	
30	$2 * 3 * 5$
70	$2 * 5 * 7$
110	$2 * 5 * 11$
130	$2 * 5 * 13$
170	$2 * 5 * 17$
190	$2 * 5 * 19$
230	$2 * 5 * 23$
290	$2 * 5 * 29$
310	$2 * 5 * 31$
370	$2 * 5 * 37$
410	$2 * 5 * 41$
430	$2 * 5 * 43$
470	$2 * 5 * 47$
$m = -106$	
351	$3^3 * 13$

表 7: $P=3$ 至高の完全数

a	素因数分解
$m=-3420$	
966	$2*3*7*23$
1122	$2*3*11*17(*)$
1610	$2*5*7*23$
2090	$2*5*11*19(*)$
2210	$2*5*13*17(*)$
3342	$2*3*557(*)$
3542	$2*7*11*23$
4186	$2*7*13*23$
5474	$2*7*17*23$
6118	$2*7*19*23$
9338	$2*7*23*29$
9982	$2*7*23*31$
11914	$2*7*23*37$
13202	$2*7*23*41$
13846	$2*7*23*43$
15134	$2*7*23*47$
17066	$2*7*23*53$
18998	$2*7*23*59$
19642	$2*7*23*61$
21574	$2*7*23*67$
22862	$2*7*23*71$
23506	$2*7*23*73$
25438	$2*7*23*79$
26726	$2*7*23*83$

$(*)$ をつけた解は天与の解.

5 底が一般の至高の重完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という．

$m, e > 0$ を与えて, $q = \sigma(P^e) + m$ を素数と仮定する． $a = P^{e+1}q$ を底 P をもつ狭義の至高の重完全数という．

$q = \sigma(P^e) + m$ を変形して, $\overline{P}(q-m) + 1 = P^{e+1}, P\overline{P}q - P\overline{P}m + P = P^{e+2}$.

$\sigma(a) = \sigma(P^{e+1})\sigma(q) = \dfrac{(P^{e+2}-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) &= \overline{P}\sigma(P^{e+1})\sigma(q)\\ &= (P^{e+2}-1)(q+1)\\ &= aP - q + P^{e+2} - 1\\ &= aP - q - 1 + P\overline{P}q - P\overline{P}m + P\\ &= aP - 1 + (-1 + P\overline{P})q - P\overline{P}m + P.\end{aligned}$$

かくして $\overline{P}\sigma(a) = aP - 1 + (-1 + P\overline{P})q - P\overline{P}m + P$ を得るので,

$L_1 = \overline{P}\sigma(a) - aP + 1 + P\overline{P}m - P$ とおくと,

$L_1 = (-1 + P\overline{P})q$. 書き換えて, $q = \dfrac{L_1}{-1 + P\overline{P}}$.

$a = P^{e+1}q$ のオイラー関数を計算する．

$$\begin{aligned}P\varphi(a) &= P\varphi(P^{e+1}q)\\ &= \overline{P}P^{e+1}(q-1)\\ &= \overline{P}P^{e+1}q - \overline{P}P^{e+1}\\ &= \overline{P}a - \overline{P}P^{e+1}\\ &= \overline{P}a - \overline{P}(\overline{P}q - \overline{P}m + 1)\end{aligned}$$

これより

$$P\varphi(a) = \overline{P}a - \overline{P}^2(q-m) - \overline{P}.$$

よって,

$K_1 = P\varphi(a) - \overline{P}a - \overline{P}^2 m + \overline{P}$ とおくと $K_1 = -q\overline{P}^2$.

$q = \dfrac{K_1}{-\overline{P}^2}$. $q = \dfrac{L_1}{-1 + P\overline{P}}$, と組み合わせて

$$L_1\overline{P}^2 + K_1(-1 + P\overline{P}) = 0.$$

$$\begin{aligned}L_1\overline{P}^2 &= (\overline{P}\sigma(a) - aP + 1 + P\overline{P}m - P)\overline{P}^2\\ &= A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1\end{aligned}$$

とおくとき $L_1\overline{P}^2 = A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1$.

$$A_1 = \overline{P}^3\sigma(a), C_1 = P\overline{P}^2, D_1 = (1 + P\overline{P}m - P)\overline{P}^2.$$

$$K_1(-1 + P\overline{P}) = (P\varphi(a) - \overline{P}a - \overline{P}^2 m + \overline{P})(-1 + P\overline{P}) = B_1\varphi(a) - C_2 a - D_2$$

とおくとき,

$$K_1(-1 + P\overline{P}) = B_1\varphi(a) - C_2 a - D_2.$$

$B_1 = (-1 + P\overline{P})P, C_2 = \overline{P}(-1 + P\overline{P}), D_2 = (-\overline{P}^2 m + \overline{P})(-1 + P\overline{P})$

$$\begin{aligned} L_1\overline{P}^2 + K_1(-1+P\overline{P}) &= A_1\sigma(a) - aC_1 + D_1 + (B_1\varphi(a) - C_2a - D_2) \\ &= A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - a(C_1+C_2) + D_1 - D_2) \end{aligned}$$

$$L_1\overline{P}^2 + K_1(-1+P\overline{P}) = A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - a(C_1+C_2) + D_1 - D_2).$$

$$A_1 = \overline{P}^3, C_1 = P\overline{P}^2, D_1 = (1+P\overline{P}m - P)\overline{P}^2.$$

$$B_1 = (-1+P\overline{P})P, C_2 = \overline{P}(-1+P\overline{P}), D_2 = (-\overline{P}^2m + \overline{P})(-1+P\overline{P})$$

$$CC = C_1 + C_2 = P\overline{P}^2 + \overline{P}(-1+P\overline{P}) = \overline{P}(-1+2P\overline{P}),$$

$$DD = D_1 - D_2 = (1+P\overline{P}m - P)\overline{P}^2 - (-\overline{P}^2m + \overline{P})(-1+P\overline{P})$$
$$A_1 = \overline{P}^3, B_1 = (-1+P\overline{P})P, CC = \overline{P}(-1+2P\overline{P}).$$

$$A_1\sigma(a) + B_1\varphi(a) - CCa = DD.$$

表 8: $P = 2, 3, 5, 7$, 重完全数

P	A_1	B_1	C_1
2	1	2	3
3	8	15	22
5	64	95	156
7	216	287	498

表 9: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m=-14	
187	$11*17$
7803	3^3*17^2
215163	$3^3*13*613$
m=-10	
17	17
1127	7^2*23
2997	3^4*37
m=-6	
13	13
18	$2*3^2$
297	3^3*11
441	3^2*7^2
1935	3^2*5*43
6517	7^3*19
30267	$3^3*19*59$
216567	$3^3*13*617$

表 10: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m=-2	
217269	$3^3 * 13 * 619$
$m = 0$	
7	7
52	$2^2 * 13$
66	$2 * 3 * 11$

表 11: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 2	
4	2^2
5	5
25	5^2
125	5^3
143	$11 * 13$
351	$3^3 * 13$
625	5^4
3125	5^5
15625	5^6
78125	5^7

表 12: $P = 3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 6	
6	$2 * 3$
45	$3^2 * 5$
3321	$3^4 * 41$
24273	$3^3 * 29 * 31$
m= 14	
63	$3^2 * 7$
525	$3 * 5^2 * 7$
3483	$3^4 * 43$
8789	$11 * 17 * 47$
267543	$3^6 * 367$

表 13: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
m= 18	
15	$3*5$
459	3^3*17
2115	3^2*5*47
163275	$3*5^2*7*311$
m= 22	
931	7^2*19
154297	$11*13^2*83$
221481	$3^3*13*631$

表 14: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
$m=26$	
14	$2*7$
21	$3*7$
35	$5*7$
77	$7*11$
91	$7*13$
119	$7*17$
133	$7*19$
161	$7*23$
203	$7*29$
217	$7*31$
259	$7*37$
287	$7*41$
301	$7*43$

6 固有完全数

固有完全数 $k_0=7,52,66$.
i. $k_0=7$ のとき
$A_1=8,B_1=15,C_1=22$ により $D_0=C_1k_0-2B_1\varphi(k_0)=22*7-30*6=-26$.

ii. $k_0=52$ のとき
$D_0=C_1k_0-2B_1\varphi(k_0)=22*52-30*24=-424$.

iii. $k_0=66$ のとき
$D_0=C_1k_0-2B_1\varphi(k_0)=22*66-30*20=-852$.

表 15: $P=3$ 至高の重完全数

a	素因数分解
$m=-424$	
156	2^2*3*13
260	2^2*5*13
364	2^2*7*13
431	431
572	$2^2*11*13$
884	$2^2*13*17$
988	$2^2*13*19$
1196	$2^2*13*23$
1508	$2^2*13*29$
1612	$2^2*13*31$
1924	$2^2*13*37$
2132	$2^2*13*41$
2236	$2^2*13*43$
2444	$2^2*13*47$
2756	$2^2*13*53$
3068	$2^2*13*59$
3172	$2^2*13*61$
3484	$2^2*13*67$
3692	$2^2*13*71$
3796	$2^2*13*73$
4108	$2^2*13*79$
4316	$2^2*13*83$
4628	$2^2*13*89$

表 16: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
5044	$2^2 * 13 * 97$
5252	$2^2 * 13 * 101$
5356	$2^2 * 13 * 103$
5564	$2^2 * 13 * 107$
5668	$2^2 * 13 * 109$
5876	$2^2 * 13 * 113$
6604	$2^2 * 13 * 127$
6812	$2^2 * 13 * 131$
7124	$2^2 * 13 * 137$
7228	$2^2 * 13 * 139$
7748	$2^2 * 13 * 149$
7852	$2^2 * 13 * 151$
8164	$2^2 * 13 * 157$
8476	$2^2 * 13 * 163$
8684	$2^2 * 13 * 167$
8996	$2^2 * 13 * 173$
9308	$2^2 * 13 * 179$
9412	$2^2 * 13 * 181$
9932	$2^2 * 13 * 191$

表 17: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
10036	$2^2 * 13 * 193$
10244	$2^2 * 13 * 197$
10348	$2^2 * 13 * 199$
10972	$2^2 * 13 * 211$
11596	$2^2 * 13 * 223$
11804	$2^2 * 13 * 227$
11908	$2^2 * 13 * 229$
12116	$2^2 * 13 * 233$
12428	$2^2 * 13 * 239$
12532	$2^2 * 13 * 241$
13052	$2^2 * 13 * 251$
13364	$2^2 * 13 * 257$
13676	$2^2 * 13 * 263$
13988	$2^2 * 13 * 269$
14092	$2^2 * 13 * 271$
14404	$2^2 * 13 * 277$
14612	$2^2 * 13 * 281$
14716	$2^2 * 13 * 283$
15236	$2^2 * 13 * 293$
15964	$2^2 * 13 * 307$
16172	$2^2 * 13 * 311$
16276	$2^2 * 13 * 313$
16484	$2^2 * 13 * 317$
17212	$2^2 * 13 * 331$
17524	$2^2 * 13 * 337$
18044	$2^2 * 13 * 347$
18148	$2^2 * 13 * 349$
18356	$2^2 * 13 * 353$
18668	$2^2 * 13 * 359$
19084	$2^2 * 13 * 367$
19396	$2^2 * 13 * 373$
19708	$2^2 * 13 * 379$
19916	$2^2 * 13 * 383$

表 18: $P = 3, m = -424$ 至高の重完全数

a	素因数分解
20228	$2^2 * 13 * 389$
20644	$2^2 * 13 * 397$
20852	$2^2 * 13 * 401$
21268	$2^2 * 13 * 409$
21788	$2^2 * 13 * 419$
21892	$2^2 * 13 * 421$
22412	$2^2 * 13 * 431$
22516	$2^2 * 13 * 433$
22828	$2^2 * 13 * 439$
23036	$2^2 * 13 * 443$
23348	$2^2 * 13 * 449$
23764	$2^2 * 13 * 457$
23972	$2^2 * 13 * 461$
24076	$2^2 * 13 * 463$
24284	$2^2 * 13 * 467$
24908	$2^2 * 13 * 479$
25324	$2^2 * 13 * 487$
25532	$2^2 * 13 * 491$
25948	$2^2 * 13 * 499$
26156	$2^2 * 13$

表 19: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
330	$2 * 3 * 5 * 11$
462	$2 * 3 * 7 * 11$
858	$2 * 3 * 11 * 13$
859	859
1122	$2 * 3 * 11 * 17$
1254	$2 * 3 * 11 * 19$
1518	$2 * 3 * 11 * 23$
1914	$2 * 3 * 11 * 29$
2046	$2 * 3 * 11 * 31$
2442	$2 * 3 * 11 * 37$
2706	$2 * 3 * 11 * 41$
2838	$2 * 3 * 11 * 43$
3102	$2 * 3 * 11 * 47$
3498	$2 * 3 * 11 * 53$
3894	$2 * 3 * 11 * 59$

表 20: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
4026	$2 * 3 * 11 * 61$
4422	$2 * 3 * 11 * 67$
4686	$2 * 3 * 11 * 71$
4818	$2 * 3 * 11 * 73$
5214	$2 * 3 * 11 * 79$
5478	$2 * 3 * 11 * 83$
5874	$2 * 3 * 11 * 89$
6402	$2 * 3 * 11 * 97$
6666	$2 * 3 * 11 * 101$
6798	$2 * 3 * 11 * 103$
7062	$2 * 3 * 11 * 107$
7194	$2 * 3 * 11 * 109$
7458	$2 * 3 * 11 * 113$
8382	$2 * 3 * 11 * 127$
8646	$2 * 3 * 11 * 131$
9042	$2 * 3 * 11 * 137$
9174	$2 * 3 * 11 * 139$
9834	$2 * 3 * 11 * 149$
9966	$2 * 3 * 11 * 151$

表 21: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
10362	$2 * 3 * 11 * 157$
10758	$2 * 3 * 11 * 163$
11022	$2 * 3 * 11 * 167$
11418	$2 * 3 * 11 * 173$
11814	$2 * 3 * 11 * 179$
11946	$2 * 3 * 11 * 181$
12606	$2 * 3 * 11 * 191$
12738	$2 * 3 * 11 * 193$
13002	$2 * 3 * 11 * 197$
13134	$2 * 3 * 11 * 199$
13926	$2 * 3 * 11 * 211$
14718	$2 * 3 * 11 * 223$
14982	$2 * 3 * 11 * 227$
15114	$2 * 3 * 11 * 229$
15378	$2 * 3 * 11 * 233$
15774	$2 * 3 * 11 * 239$
15906	$2 * 3 * 11 * 241$
16566	$2 * 3 * 11 * 251$
16962	$2 * 3 * 11 * 257$
17358	$2 * 3 * 11 * 263$
17754	$2 * 3 * 11 * 269$
17886	$2 * 3 * 11 * 271$
18282	$2 * 3 * 11 * 277$
18546	$2 * 3 * 11 * 281$
18678	$2 * 3 * 11 * 283$
19338	$2 * 3 * 11 * 293$

表 22: $P = 3, m = -852$ 至高の重完全数

a	素因数分解
20262	$2 * 3 * 11 * 307$
20526	$2 * 3 * 11 * 311$
20658	$2 * 3 * 11 * 313$
20922	$2 * 3 * 11 * 317$
21846	$2 * 3 * 11 * 331$
22242	$2 * 3 * 11 * 337$
22902	$2 * 3 * 11 * 347$
23034	$2 * 3 * 11 * 349$
23298	$2 * 3 * 11 * 353$
23694	$2 * 3 * 11 * 359$
24222	$2 * 3 * 11 * 367$
24618	$2 * 3 * 11 * 373$
25014	$2 * 3 * 11 * 379$
25278	$2 * 3 * 11 * 383$

7 底が一般の至高の半完全数

素数 P を 1 つ決めてこれを底 (base) という.

$m, e > 0$ を与えて, $q = \sigma(P^e) + m$ を素数と仮定する. $\alpha = P^{e-1}q$ を底 P をもつ狭義の至高の半完全数 (half perfect numbers) という.

$q = \sigma(P^e) + m$ を変形して, $\overline{P}(q-m)+1 = P^{e+1}, P\overline{P}q - P\overline{P}m + P = P^{e+2}$.

$\sigma(\alpha) = \sigma(P^{e-1})\sigma(q) = \dfrac{(P^e-1)(q+1)}{\overline{P}}$ なので

$$\begin{aligned}P\overline{P}\sigma(\alpha) &= P(P^e-1)(q+1)\\ &= \alpha P^2 - Pq - P + P^{e+1}\\ &= P^2\alpha - q - \overline{P}(1+m).\end{aligned}$$

かくして $q = -P\overline{P}\sigma(\alpha) + P^2\alpha - \overline{P}(1+m)$ を得る.

次に, $\alpha = P^{e-1}q$ のオイラー関数を計算する.

$$\begin{aligned}P\varphi(\alpha) &= P\varphi(P^{e-1}q)\\ &= \overline{P}P^{e-1}(q-1)\\ &= \overline{P}P^{e-1}q - \overline{P}P^{e-1}\\ &= \overline{P}\alpha - \overline{P}P^{e-1}.\end{aligned}$$

これより P^2 をかけて

$$\begin{aligned}P^3\varphi(\alpha) &= P^2\overline{P}\alpha - \overline{P}P^{e+1}\\ &= \overline{P}P^2\alpha - \overline{P}^2(q-m) - \overline{P}\\ &= \overline{P}P^2\alpha - \overline{P}^2q + \overline{P}^2m - \overline{P}\\ &.\end{aligned}$$

よって,

$$\overline{P}^2q = -P^3\varphi(\alpha) + \overline{P}P^2\alpha + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

$q = -P\overline{P}\sigma(\alpha) + P^2\alpha - \overline{P}(1+m)$ を左辺に代入して

$$\overline{P}^2(-P\overline{P}\sigma(\alpha) + P^2\alpha - \overline{P}(1+m)) = -P^3\varphi(\alpha) + \overline{P}P^2\alpha + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

$$0 = \overline{P}^2(P\overline{P}\sigma(\alpha) - P^2\alpha + \overline{P}(1+m)) - P^3\varphi(\alpha) + \overline{P}P^2\alpha + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

$$0 = \overline{P}^3P\sigma(\alpha) - \overline{P}^2P^2\alpha + \overline{P}^3(1+m) - P^3\varphi(\alpha) + \overline{P}P^2\alpha + m\overline{P}^2 - \overline{P}.$$

そこで

$$A'_2\sigma(\alpha) + B'_2\varphi(\alpha) - C'_2\alpha = D'_2$$

の形に整理すると,

$$A'_2 = \overline{P}^3P, B'_2 = -P^3, C'_2 = P^2\overline{P}(P-2), D'_2 = P\overline{P}(2-P-\overline{P}m).$$

これらは P の倍数なのであらためて P を除した (A,B,C) 完全数の係数の定義をする.

$$A_2 = \overline{P}^3, B_2 = -P^2, C_2 = P(P-1)(P-2), D_2 = \overline{P}(2-P-\overline{P}m).$$

表 23: $P = 2, 3, 5, 7,$ 半完全数

P	A_2	B_2	C_2	D_2
2	1	-4	0	$-m$
3	8	-9	6	$-2(1+2m)$
5	125	-25	60	$-4(3+4m)$
7	343	-49	210	$-6(5+6m)$

表 24: half perfect

a	素因数分解
m=-4	
6	$2 * 3$
44	$2^2 * 11$
944	$2^4 * 59$
m= -3	
98	$2 * 7^2$
m= -2	
10	$2 * 5$
52	$2^2 * 13$
232	$2^3 * 29$
976	$2^4 * 61$

表 25: half perfect

a	素因数分解
m= 0	
14	$2 * 7$
105	$3 * 5 * 7$
248	$2^3 * 31$
418	$2 * 11 * 19$
1485	$3^3 * 5 * 11$
3135	$3 * 5 * 11 * 19$
3596	$2^2 * 29 * 31$
3956	$2^2 * 23 * 43$
4064	$2^5 * 127$
5396	$2^2 * 19 * 71$
8636	$2^2 * 17 * 127$
m= 1	
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7
256	2^8
512	2^9
1024	$2^{1}0$
2048	$2^{1}1$
4096	$2^{1}2$
8192	$2^{1}3$

表 26: half perfect

a	素因数分解
m= 2	
68	$2^2 * 17$
m= 3	
1	1
m= 4	
3	3
22	$2 * 11$
76	$2^2 * 19$
1072	$2^4 * 67$
4192	$2^5 * 131$
m= 5	
m= 6	
26	$2 * 13$
296	$2^3 * 37$
m= 7	
m= 8	
15	$3 * 5$
92	$2^2 * 23$
1136	$2^4 * 71$
5548	$2^2 * 19 * 73$
8908	$2^2 * 17 * 131$

表 27: half perfect

a	素因数分解
m= 9	
m= 10	
5	5
34	$2 * 17$
328	$2^3 * 41$
1168	$2^4 * 73$
4384	$2^5 * 137$
m= 11	
9	3^2
m= 12	
38	$2 * 19$
344	$2^3 * 43$
442	$2 * 13 * 17$
4448	$2^5 * 139$

表 28: half perfect

a	素因数分解
m= 13	
m= 14	
116	$2^2 * 29$
m= 15	
m= 16	
7	7
21	$3 * 7$
46	$2 * 23$
124	$2^2 * 31$
376	$2^3 * 47$
506	$2 * 11 * 23$
1264	$2^4 * 79$
m= 17	
m= 18	
45	$3^2 * 5$
m= 19	
m= 20	
1328	$2^4 * 83$
9316	$2^2 * 17 * 137$
m= 21	

表 29: half perfect

a	素因数分解
m= -48	
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
70	$2 * 5 * 7$
154	$2 * 7 * 11$
182	$2 * 7 * 13$
238	$2 * 7 * 17$
266	$2 * 7 * 19$
322	$2 * 7 * 23$
406	$2 * 7 * 29$
434	$2 * 7 * 31$
315	$3^2 * 5 * 7$
2528	$2^5 * 79$
3404	$2^2 * 23 * 37$
4484	$2^2 * 19 * 59$
7004	$2^2 * 17 * 103$

表 30: half perfect

a	素因数分解
m= -46	
272	$2^4 * 17$
m= -45	
m= -44	
304	$2^4 * 19$
2656	$2^5 * 83$
m= -43	
36	$2^2 * 3^2$
m= -42	
m= -41	
m= -40	
30	$2 * 3 * 5$
368	$2^4 * 23$
4636	$2^2 * 19 * 61$
7276	$2^2 * 17 * 107$

表 31: half perfect

a	素因数分解
m= -388	
5044	$2^2 * 13 * 97$
m= -384	
210	$2 * 3 * 5 * 7$
620	$2^2 * 5 * 31$
1155	$3 * 5 * 7 * 11$
1365	$3 * 5 * 7 * 13$
1785	$3 * 5 * 7 * 17$
1995	$3 * 5 * 7 * 19$
2415	$3 * 5 * 7 * 23$
3045	$3 * 5 * 7 * 29$
3255	$3 * 5 * 7 * 31$
3885	$3 * 5 * 7 * 37$
4305	$3 * 5 * 7 * 41$
4515	$3 * 5 * 7 * 43$
4935	$3 * 5 * 7 * 47$
5565	$3 * 5 * 7 * 53$
6195	$3 * 5 * 7 * 59$
6405	$3 * 5 * 7 * 61$
7035	$3 * 5 * 7 * 67$
7455	$3 * 5 * 7 * 71$
7665	$3 * 5 * 7 * 73$
8295	$3 * 5 * 7 * 79$
8715	$3 * 5 * 7 * 83$
9345	$3 * 5 * 7 * 89$
10185	$3 * 5 * 7 * 97$
10605	$3 * 5 * 7 * 101$
10815	$3 * 5 * 7 * 103$
11235	$3 * 5 * 7 * 107$
11445	$3 * 5 * 7 * 109$
11865	$3 * 5 * 7 * 113$
13335	$3 * 5 * 7 * 127$
13755	$3 * 5 * 7 * 131$
14385	$3 * 5 * 7 * 137$
14595	$3 * 5 * 7 * 139$
15645	$3 * 5 * 7 * 149$
15855	$3 * 5 * 7 * 151$