(A,B,C) 完全数

飯高 茂

平成 31 年 10 月 30 日

1 (A,B,C) 完全数

新しく始めた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化するとその本質が露わになることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

2 固有完全数

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a=kp$:B 型解) とする.

$$\begin{aligned}
A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp \\
&= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p+A\sigma(k)-B\varphi(k) \\
&= D
\end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=kp$ と書けるとき 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよびそれ以外をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すことがすることが基本的課題である.

一般に与えられた定数項 D に対して (A,B,C) 完全数を求めることは特別な場合以外には難しい.

正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

ここでは, 固有完全数が固有値にあたりと 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 (0,2,1) 完全数

$a=2^e$ とおく. $\varphi(a)=2\varphi(2^e)=2*2^{e-1}$ を満たすので $2\varphi(a)=2^e=a$.

これを根拠に (0,2,1) 完全数を考える.

定数項 D の (0,2,1) 完全数 の方程式は $2\varphi(a)-a=D$. $m=-D$ とおき定数 m を平行移動の定数と考える.

$2\varphi(k)-k=0$ を満たす k が (0,2,1) 完全数の固有完全数であり, これを k_0 とおく.
$k_0=2^e$ となる. これが 固有完全数.
$D_0=-2\varphi(k_0)=-2^e$ が宇宙定数項.
したがって $2\varphi(a)-a=D_0=-2^e$ が (0,2,1) 宇宙完全数の方程式.
$a-2\varphi(a)=2^e$ となる. a は偶数なので, $a=2^\eta L, (L:$ 奇数$)$ とかける.
このとき $a-2\varphi(a)=2^\eta(L-\varphi(L))=2^e$.
これより $L-\varphi(L)=2^{e-\eta}$. L は奇数なので, $2^{e-\eta}=1$.
よって, $e=\eta$, L は素数 p となり,(0,2,1) 宇宙完全数は $a=2^e p, (p:$ 奇素数$)$ と書ける.
この場合は完全に解決した.

4　計算例

表 1: $2\varphi(a)-a=D$,$D=-8,-4,-2$

a	素因数分解	a	素因数分解	a	素因数分解
$D=-8$		$D=-4$		$D=-2$	
24	2^3*3	12	2^2*3	6	$2*3$
40	2^3*5	20	2^2*5	10	$2*5$
56	2^3*7	28	2^2*7	14	$2*7$
88	2^3*11	44	2^2*11	22	$2*11$
104	2^3*13	52	2^2*13	26	$2*13$
136	2^3*17	68	2^2*17	34	$2*17$
152	2^3*19	76	2^2*19	38	$2*19$
184	2^3*23	92	2^2*23	46	$2*23$
232	2^3*29	116	2^2*29	58	$2*29$
248	2^3*31	124	2^2*31	62	$2*31$
296	2^3*37	148	2^2*37	74	$2*37$

$D=-6$ のとき $a=18=2*3^2$

5　D :偶数

$2\varphi(a)-a=D$ は D が偶数なら上記の方法で容易に解ける.
D :偶数なので $D=-2^eG,(G:$ 奇数$)$ とおく.
このとき $2\varphi(a)-a=D$ の解は偶数なので
$a=2^\varepsilon L,(L:$ 奇数$)$ とおくことができるので.
$2\varphi(a)-a=2\varphi(2^\varepsilon L)-2^\varepsilon L=2^\varepsilon(\varphi(L)-L)$ なので

$$2^\varepsilon(\varphi(L)-L)=D=-2^eG$$

$e\geq\varepsilon$ となり, $\xi=e-\varepsilon$ とおけば,

$$2^\varepsilon(L-\varphi(L))=2^\xi G.$$

L: 奇数, $\varphi(L)$: 偶数なので, $2^\xi G$ は奇数なので, $\xi=0;e=\varepsilon$.
したがって, $a=2^\varepsilon L, L-\varphi(L)=G$.
$co\varphi(L)=L-\varphi(L)$ をオイラー余関数という. この逆関数があれば G から L が決定できる.
例. $L=p+q,(p,q$:異なる素数$)$ とおけば $p+q=G+1$.
ここで Gold Bach 予想が精神的支えとなる.

6 D :奇数

D が奇数の場合は一般的解決はきわめて困難である.

例として $D=1$ の場合を取り上げる. $2\varphi(a)-a=D=1,(m=-1,D=1)$ の解はフェルマ素数の積という著しい特色を持っている.

たまたま見ていたテレビ番組で, 自然石を使って石垣を組み立てる伝統の技を見ることができた. フェルマ素数が積み上げられた表は素数の作る石垣を思わず連想した.

表 2: $2\varphi(a)-a=D=-m$,$m=-1,D=1$

a	素因数分解
3	3
15	$3*5$
255	$3*5*17$
65535	$3*5*17*257$
	$3*5*17*257*65537$

これは 5 段の素数石垣と呼ぶことができる.

フェルマ素数の積が出てくる理由を考えてみよう.

$2\varphi(a)-a=1$ を満たす解, と互いに素な素数 p の積 $a'=ap$ として次の解 a' が出来ているとする.

$2\varphi(a')-a'=1$ を満たすので $2\varphi(a')=2\varphi(a)(p-1)$ により

$$\begin{aligned}1 &= 2\varphi(a')-a'\\ &= 2\varphi(a)(p-1)-ap\\ &= (2\varphi(a)-a)p-2\varphi(a)\\ &= p-2\varphi(a)\end{aligned}$$

故に $p=1+2\varphi(a)$.

$2\varphi(a)-a=1$ を満たすので, $p=1+2\varphi(a)=a+2$.

$a=3$ から始めると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2=5$. これは素数. したがって $a=3*5$ が次の解.

$a=3*5$ とすると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2*4=17$. これは素数. $a=3*5*17$ が次の解.

$a=3*5*17$ とすると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16=257$. これは素数. $a=3*5*17*257$ が次の解.

$a=3*5*17*257$ とすると, $1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16*256=65537$. これは素数. $a=3*5*17*257*65537$ が次の解. これは素数ではない.

$a=3*5*17*257*65537$ とすると, $1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16*256*65536=4294967297=641*6700417$ と素因数分解されるので, これは素数ではない.

表 3: $2\varphi(a)-a=D=-m$,$m=-3$

a	素因数分解
5	5
9	3^2
21	$3*7$
285	$3*5*19$
27645	$3*5*19*97$
45	3^2*5
765	3^2*5*17
196605	$3^2*5*17*257$
	$3^2*5*17*257*65537$

ここでは解の素因数分解にしたがって, 解を分類する.

1) $a = Q^e$ 素数のべき.
$\varphi(a) = \varphi(Q^e) = \overline{Q}Q^{e-1}$ なので

$$3 = 2\varphi(a) - a = 2\overline{Q}Q^{e-1} - Q^e = Q^{e-1}(2\overline{Q} - Q) = Q^{e-1}(Q-2)$$

i.$e = 1$ なら $3 = Q - 2$ より $a = Q = 5$.
ii. $e > 1$ なら $3 = Q^{e-1}(Q-2)$ より $Q = 3, e - 1 = 1; a = 3^2$.

$2\varphi(a) - a = -m_1$ を満たす解 a と互いに素な素数 p の積 $a' = ap$ が $2\varphi(a') - a' = -m_2$ を満たすとする.

$$\begin{aligned} -m_2 &= 2\varphi(a') - a' \\ &= 2\varphi(a)(p-1) - ap \\ &= (2\varphi(a) - a)p - 2\varphi(a) \\ &= -pm_1 - 2\varphi(a) \end{aligned}$$

故に

$$-m_2 = -pm_1 - 2\varphi(a).$$

$2\varphi(a) - a = -m_1$ により,

$$m_2 = pm_1 + 2\varphi(a) = pm_1 + (a - m_1) = a + (p-1)m_1.$$

$a = 3, m_1 = -1, m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = a - (p-1) = 4 - p; p = 7$.
$a = 3 * 5 = 15, m_1 = -1, m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 15 - (p-1) = 16 - p; p = 19$. よって, $a' = 3 * 5 * 19$.
$a = 3 * 5 * 19 = 285, m_1 = m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 3 * 5 * 19 + 3(p-1); p = 96 + 1 = 97$; 素数. よって, $a' = 3 * 5 * 19 * 97$.
$a = 3 * 5 * 19 * 97, m_1 = m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 3 * 5 * 19 * 97 - (p-1)3; p = 3 * 5 * 19 * 97 + 1 = 67 * 139$; 非素数.

表 4: $2\varphi(a) - a = D = -m, m = -5$

a	素因数分解
7	7
75	$3 * 5^2$
1275	$3 * 5^2 * 17$
327675	$3 * 5^2 * 17 * 257$
	$3 * 5^2 * 17 * 257 * 65537$

$2\varphi(a) - a = 1$ を満たす解 a が 5 の倍数なら $b = 5a$ は $2\varphi(b) - b = 5$.
したがって $3 * 5^2 * 17 * 257 * 65537$ も $2\varphi(b) - b = 5$ の解になる.

表 5: $2\varphi(a) - a = D = -m, m = 2$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$
38	$2 * 19$
46	$2 * 23$

表 6: $2\varphi(a) - a = D =, D = -20$

a	素因数分解
$D = -20$	
100	$2^2 * 5^2$
$D = -18$	
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
$D = -16$	
48	$2^4 * 3$
80	$2^4 * 5$
112	$2^4 * 7$
176	$2^4 * 11$
208	$2^4 * 13$
272	$2^4 * 17$
304	$2^4 * 19$
368	$2^4 * 23$
464	$2^4 * 29$
496	$2^4 * 31$
592	$2^4 * 37$
656	$2^4 * 41$

表 7: $2\varphi(a) - a = D =, D = -14$

a	素因数分解
$D = -14$	
30	$2 * 3 * 5$
98	$2 * 7^2$
$D = -12$	
36	$2^2 * 3^2$
$D = -10$	
50	$2 * 5^2$
$D = -8$	
24	$2^3 * 3$
40	$2^3 * 5$
56	$2^3 * 7$
88	$2^3 * 11$
104	$2^3 * 13$
136	$2^3 * 17$
152	$2^3 * 19$
184	$2^3 * 23$
232	$2^3 * 29$
248	$2^3 * 31$
296	$2^3 * 37$
328	$2^3 * 41$

7 (0,3,2) 宇宙完全数

$a = 3^e$ とおく. $\varphi(a) = \varphi(3^e) = 2 * 3^{e-1}$ なので, $3\varphi(a) = 2 * 3^e = 2a$.

これにより,(0,3,2) 完全数を考える.
固有完全数の方程式は $3\varphi(k) = 2k$.
この解は 3 の倍数になろので $k = 3^e L, ((3, L)$: 互いに素) と書ける.

$$3\varphi(k) - 2k = 2 * 3^e \varphi(L) - 2 * 3^e L = -2 * 3^e (co\varphi(L)).$$

$3\varphi(k) - 2k = 0$ により, $co\varphi(L) = 0. L = 1$ が導かれる. よって, $k_0 = 3^e$ が 固有完全数.

次に宇宙定数項 D_0 を求める.
宇宙定数項 $D_0 = 2k_0 - 6\varphi(k_0) = 2k_0 - 4(k_0) = -2k_0 = -2 * 3^e$.
(0,3,2) 宇宙完全数の方程式は次の通り.

$$3\varphi(a) - 2a = D_0 = -2k_0 = -2 * 3^e.$$

これより a は 3 の倍数になり $a = 3^f L, ((3, L)$: 互いに素) と書けるので

$$-2 * 3^e = 3\varphi(a) - 2a = 3\varphi(3^f L) - 2 * 3^f L = 2 * 3^f(\varphi(L) - L).$$

よって, $-3^e = 3^f(\varphi(L) - L).co\varphi(L) = L - \varphi(L)$ と書くとき

$$3^{e-f} = co\varphi(L).$$

i. $f = e$ なら $-1 = \varphi(L) - L$. L は素数 なので, q とおくとき ,$a = 3^e L = 3^e q$.

ii. $f < e$ なら $\xi = e - f$ とおくとき $3^\xi = co\varphi(L)$ を満たす 3 で割れない L を探すことが問題となる.

L は 3 で割れないであって, $3^\xi = co\varphi(L)$ を満たすので, 平方因子を持たない. $L = p_1 p_2$ と異なる奇素数の積と仮定すると,

$co\varphi(L) = p_1 + p_2 - 1$. よって $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi$. $\xi \geq 3$ なら偶数 $1 + 3^\xi \geq 28$ なので GB 予想より奇素数の和 $p_1 + p_2$ で書けると思われる.

表 8: $3\varphi(a) - 2a = D$

$D = -2 * 3^4$	$e = 4$	$D = -2 * 3^5$	$e = 5$	$D = -2 * 3^6$	$e = 6$
a	素因数分解	a	素因数分解	a	素因数分解
162	$2 * 3^4$	486	$2 * 3^5$	1458	$2 * 3^6$
345	$3 * 5 * 23$	1035	$3^2 * 5 * 23$	3105	$3^3 * 5 * 23$
405	$3^4 * 5$	1215	$3^5 * 5$	3585	$3 * 5 * 239$
561	$3 * 11 * 17$	1683	$3^2 * 11 * 17$	3645	$3^6 * 5$
567	$3^4 * 7$	1701	$3^5 * 7$	5049	$3^3 * 11 * 17$
891	$3^4 * 11$	2343	$3 * 11 * 71$	5103	$3^6 * 7$
1053	$3^4 * 13$	2673	$3^5 * 11$	7029	$3^2 * 11 * 71$
1377	$3^4 * 17$	3159	$3^5 * 13$	7689	$3 * 11 * 233$
1539	$3^4 * 19$	4071	$3 * 23 * 59$	8019	$3^6 * 11$
1863	$3^4 * 23$	4131	$3^5 * 17$	9477	$3^6 * 13$

$3^e q$ の解は通常解:　それ以外は天与の解.
$D = -2 * 3^4, e = 4$ のときは, $f = 1$ なら, $\xi = e - f = 3$, $3^\xi = 27 = co\varphi(L)$.
ここで, $L = p_1 p_2$ とおけば $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi = 1 + 27 = 28$.
p_1, p_2 は 3 以外の素数なので, $(p_1, p_2) = (5, 23), (11, 17)$.

$D = -2 * 3^4, e = 5$ のときは, $f = 1$ なら, $\xi = e - f = 4$, $3^\xi = 81 = co\varphi(L)$.
$L = p_1 p_2$ とおけば $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi = 1 + 81 = 82$.
p_1, p_2 は 3 以外の素数なので, $(p_1, p_2) = (23, 59), (11, 71)$.

8 $P = 3$ での素数石垣

$3\varphi(a) - 2a = -m$ での解に素数積み上げでできる例を探そう.

表 9: $3\varphi(a) - 2a = -m$

a	素因数分解
$m = -22$	
85	$5 * 17$
1645	$5 * 7 * 47$
$m = -20$	
23	23
$m = -16$	
19	19
$m = -14$	
17	17
65	$5 * 13$
1505	$5 * 7 * 43$
245	$5 * 7^2$
9065	$5 * 7^2 * 37$
9065*1297	$5 * 7^2 * 37 * 1297$

$m = -14$のときの下に 3 段の素数石垣, 模様入りが見える.

表 10: $3\varphi(a) - 2a = -m$

a	素因数分解
$m = -10$	
13	13
25	5^2
175	$5^2 * 7$
6475	$5^2 * 7 * 37$
6475*1297	$5^2 * 7 * 37 * 1297$
55	$5 * 11$
715	$5 * 11 * 13$
32395	$5 * 11 * 19 * 31$
1435	$5 * 7 * 41$

$m = -10$のときに 4 段の素数石垣が見える.

表 11: $3\varphi(a) - 2a = -m$

a	素因数分解
$m = -8$	
11	11
$m = -4$	
7	7
$m = -2$	
5	5
35	$5 * 7$
1295	$5 * 7 * 37$
1295*1297	$5 * 7 * 37 * 1297$
$m = -1$	
1	1

$m = -10$のときに 4 段の素数石垣が見える.これに 5 倍や 7 倍をすると素数石垣, 模様入りがm=-10,-14の場合に見えるのである.

$m=-2$ のときは素数石垣になっている.

$3\varphi(a)-2a=-m_1$ を満たすとき a と 互いに素な素数 p がり $a'=ap$ は $3\varphi(a')-2a'=-m_2$ を満たすと仮定する.

$$-m_2=3\varphi(a')-2a'=3\varphi(a)(p-1)-2ap=(3\varphi(a)-2a)p-3\varphi(a)=-m_1p-3\varphi(a)$$

$3\varphi(a)=2a-m_1$ を代入して

$$-m_2=-m_1p-(2a-m_1)=-2a-m_1(p-1).$$

$m_1=m_2=-2$ とすると式は簡単になり, $2=-2a+2(p-1)$.

$p=a+2$ となる.

i. $a=5$ とすると, $p=5+2=7, a'=5*7=35$

ii. $a=5*7=35$ とすると, $p=35+2=37$; 素数なので,$a'=35*p=(36-1)(36+1)=5*7*37$.

iii. $a=5*7*37$ とすると, $p=5*7*37+2=36^2+1=1297$; 素数なので,$a'=5*7*37*1297$.

iv. $a=5*7*37*1297$ とすると, $p=5*7*37*1297+2=1679617=17*98801$, 素数ではない.

表 12: $3\varphi(a)-2a=-m$,$m=-2$

a	素因数分解
5	5
35	$5*7=6^2-1$
1295	$5*7*37=6^4-1$
1679617	$5*7*37*1297=6^8-1$

これは素数の積み上げが４段の例である.

$3\varphi(a)-2a=-m$ での解 a が素数 q の倍数とする．$a=\beta q$ と書ける．
$\alpha=aq=\beta q^2$ を満たす．
$3\varphi(\alpha)-2a\alpha=-mq$ を証明する．

$$\begin{aligned}-m &= 3\varphi(a)-2a\\ &= 3\varphi(\beta q)-2\beta q\\ &= 3\varphi(\beta)(q-1)-2\beta q\\ &= (3\varphi(\beta)-2\beta)q-\varphi(\beta)\\ &= (3\varphi(\beta)\overline{q}-2\beta)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\varphi(\alpha)-2\alpha &= 3\varphi(\beta q^2)-2\beta q^2\\ &= 3\varphi(\beta)\overline{q}q-2\beta q^2\\ &= q(3\varphi(\beta)\overline{q}-2\beta)q\\ &= q(3\varphi(\beta q)-2\beta q\\ &= 3\varphi(\beta)q\overline{q}-2\beta q\end{aligned}$$

$$= q(3\varphi(\beta)\overline{q}-2\beta)q$$

$$\begin{aligned}&= q(3\varphi(a)-2a)\\ &= -qm\end{aligned}$$

よって，$3\varphi(\alpha)-2\alpha=-mq$.
したがって，$a=6475=5^2*7*37$ に加えて $a'=5^2*7*37*1297$ も解になる．

表 13: $3\varphi(a)-2a=-m, m=0$

a	素因数分解
$m=0$	
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
$m=1$	
2	2
$m=2$	
4	2^2
$m=4$	
8	2^3

$a=2^e$, $-m=3\varphi(a)-2a=-2^{e-1}$ により $m=2^{e-1}$.
$a=3^e$, $3\varphi(a)-2a$.

表 14: $3\varphi(a)-2a=-m$,$m=6$

a	素因数分解
6	$3*2$
15	$3*5$
21	$3*7$
33	$3*11$
39	$3*13$
51	$3*17$
57	$3*19$
69	$3*23$
87	$3*29$
93	$3*31$
111	$3*37$
123	$3*41$

9 $(0,P,P-1)$ 完全数

$a=P^e,(P:$ 素数$)$ なら $\overline{P}=P-1$ とおくとき
$P\varphi(a)=\overline{P}P^e=\overline{P}a$ なので, $(0,P,P-1)$ 完全数方程式を $P\varphi(a)-\overline{P}a=D$ であると理解できる.

10 $(0,P,P_1)$ 完全数

$\overline{P}=P-1$ とおくとき $P_1=\overline{P-1}$ とする.
$a=\overline{P}P^e,(P:$ 素数$)$ なら
$P\varphi(a)=\varphi(\overline{P})\overline{P}P^e=\varphi(\overline{P})a=P_1a$ 素数).
$P=3$ なら, $3\varphi(a)=a$,
$P=5$ なら, $5\varphi(a)=2a$,
$P=7$ なら, $7\varphi(a)=2a$,
$P=11$ なら, $11\varphi(a)=4a$.

11　$(1,0,2)$ 完全数

$a=2^e$ なら $\sigma(a)=2^{e+1}-1=2a-1$ を満たす.

定数部分を 一般の定数項に入れて $\sigma(a)-2a=D$ を ABC 完全数の式とみる.

$P=2$ なら固有完全数の定義式は $\sigma(k)=2k$ になり固有完全数は (元祖) 完全数になる.

固有完全数 k_0 に対して 宇宙定数項は $D_0=2k_0$ であって $\sigma(a)=2a+2k_0$ が宇宙完全数の定義式となりすべてはうまく行く.

$k_0=6$ のときを考えると $D_0=2k_0=12$.

$\sigma(a)=2a+12$ が宇宙完全数の方程式だがこれは, 古から 12 だけ過剰な過剰数と呼ばれそれなりの注目を集める存在であった.

次の数表は古代から知られていたと思われるが $6p$ 以外の値が注目された.

表 15: $\sigma(a) = 2a + 12$ の解

a	素因数分解
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$
246	$2 * 3 * 41$
258	$2 * 3 * 43$
282	$2 * 3 * 47$
318	$2 * 3 * 53$
354	$2 * 3 * 59$
366	$2 * 3 * 61$
402	$2 * 3 * 67$
426	$2 * 3 * 71$
24	$2^3 * 3$
54	$2 * 3^3$
304	$2^4 * 19$

12 $(P-1,0,P)$ 完全数

$a=P^e,(P:$ 素数$)$ なら $\overline{P}=P-1$ とおくとき $\overline{P}\sigma(a)=P^{e+1}-1=Pa-1$ が成り立つ.

そこで $\overline{P}-Pa=D$ を $(P-1,0,P)$ 完全数の定義式と見なすことができる.

$P>2$ の場合は一般化された完全数になるはずである.

13 $(2,0,3)$ 完全数

$P=3$ に限って書いて見よう.

固有完全数の定義式は $2\sigma(k)=3k$ なので k は 2 の倍数なので $k=2^eM, (M$: 2 の倍数ではない) と書ける.

$$0=2\sigma(k)-3k=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM.$$

$R=2^e$ とおくとき

$0=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM=2(2R-1)\sigma(M)-3RM$ なので

$$2(2R-1)\sigma(M)=3RM.$$

$$\frac{4R-2}{3R}=\frac{M}{\sigma(M)}\leq 1.$$

$4R-2\leq 3R$ により $2\leq 2^e=R\leq 2$.

ゆえに, $R=2, e=1$. よって, $\frac{M}{\sigma(M)}=\frac{4R-2}{3R}=1$. これより $M=1, k=2$.

固有完全数はただ 1 つ $k_0=2$.

$a=k_0p=2p$ が (2,0,3) 宇宙完全数の解なので $D_0=2\sigma(a)-3a=6p+6-6p=6$.

(2,0,3) 宇宙完全数の方程式は $2\sigma(a)-3a=6$. この解は $a=2p, (p:$ 奇素数) に限る.

定理 1 $2\sigma(a)-3a=D=6$ のとき $a=8, a=2p$. p は奇素数.

14 数値例

表 16: $2\sigma(a) - 3a = D = -m$, $P = 3$

a	素因数分解
$m = -9$	
153	$3^2 * 17$
957	$3 * 11 * 29$
1917	$3^3 * 71$
18873	$3^4 * 233$
24957	$3^2 * 47 * 59$
29637	$3^2 * 37 * 89$
67077	$3^2 * 29 * 257$
$m = -7$	
171	$3^2 * 19$
1971	$3^3 * 73$

表 17: $2\sigma(a) - 3a = D = -m = 6,\ P = 3$

a	素因数分解
$m = -6$	
6	$2 * 3$
8	2^3
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$
38	$2 * 19$
46	$2 * 23$
58	$2 * 29$
62	$2 * 31$
74	$2 * 37$
82	$2 * 41$
86	$2 * 43$
94	$2 * 47$
106	$2 * 53$
118	$2 * 59$
122	$2 * 61$
134	$2 * 67$
142	$2 * 71$
146	$2 * 73$
158	$2 * 79$
166	$2 * 83$
178	$2 * 89$
194	$2 * 97$

表 18: $2\sigma(a) - 3a = D = -m, P = 3$

a	素因数分解
$m = -3$	
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
$m = -2$	
4	2^2
$m = -1$	
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$

表 19: $2\sigma(a) - 3a = D = -m$, $P = 3$

a	素因数分解
$m = 0$	
2	2
$m = 1$	
1	1
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7

$a = 3^e$ とおくとき $2\sigma(a) = 3a - 1$ となる.
この逆が大難問. $a = 3^e$ についての概完全数予想.

15 (1,0,3) 宇宙完全数

この場合 $D = \sigma(a) - 3a$ になる.
固有完全数の定義式は $\sigma(k) = 3k$ になり
その解は例えば $k_0 = 120$.
宇宙定数項 $D_0 = 3k_0 = 360$.
$\sigma(a) - 3a = D_0 = 360$ が宇宙完全数の定義式.

表 20: 3 倍完全数, 宇宙定数項 $D_0 = 360$

a	素因数分解
$D = 72$	
480	$2^5 * 3 * 5$
2376	$2^3 * 3^3 * 11$
2856	$2^3 * 3 * 7 * 17$
$D = 84$	
420	$2^2 * 3 * 5 * 7$
1584	$2^4 * 3^2 * 11$
5292	$2^2 * 3^3 * 7^2$
5796	$2^2 * 3^2 * 7 * 23$
$D = 90$	
360	$2^3 * 3^2 * 5$
1890	$2 * 3^3 * 5 * 7$

表 21: 3 倍完全数, 宇宙定数項　$D_0 = 360$

a	素因数分解
$D = 360$	
840	$2^3 * 3 * 5 * 7$
1320	$2^3 * 3 * 5 * 11$
1560	$2^3 * 3 * 5 * 13$
2040	$2^3 * 3 * 5 * 17$
2280	$2^3 * 3 * 5 * 19$
2760	$2^3 * 3 * 5 * 23$
3480	$2^3 * 3 * 5 * 29$
3720	$2^3 * 3 * 5 * 31$
4440	$2^3 * 3 * 5 * 37$
4920	$2^3 * 3 * 5 * 41$
5160	$2^3 * 3 * 5 * 43$
5640	$2^3 * 3 * 5 * 47$
6360	$2^3 * 3 * 5 * 53$
7080	$2^3 * 3 * 5 * 59$
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
3000	$2^3 * 3 * 5^3$
1920	$2^7 * 3 * 5$

$k_0 = 120 = 2^3 * 3 * 5$ の素数倍が通常解, それ以外は天与の解である.
ここでの天与の解はすべて擬素数として説明できる.

$k_0 = 672, D_0 = 3 * 672 = 2016$
固有完全数 $k_0 = 672$ のときの宇宙完全数は次の通り

表 22: 3 倍完全数, 定数項　$D = 2016$

a	素因数分解
$D = 2016$	
3360	$2^5 * 3 * 7 * 5$
7392	$2^5 * 3 * 7 * 11$
8736	$2^5 * 3 * 7 * 13$
11424	$2^5 * 3 * 7 * 17$
12768	$2^5 * 3 * 7 * 19$
15456	$2^5 * 3 * 7 * 23$
19488	$2^5 * 3 * 7 * 29$
20832	$2^5 * 3 * 7 * 31$
24864	$2^5 * 3 * 7 * 37$
27552	$2^5 * 3 * 7 * 41$
28896	$2^5 * 3 * 7 * 43$
31584	$2^5 * 3 * 7 * 47$
39648	$2^5 * 3 * 7 * 59$

表 23: 3 倍完全数, 定数項　$D = 2016$

a	素因数分解
$D = 2016$	
40992	$2^5 * 3 * 7 * 61$
45024	$2^5 * 3 * 7 * 67$
47712	$2^5 * 3 * 7 * 71$
49056	$2^5 * 3 * 7 * 73$
53088	$2^5 * 3 * 7 * 79$
55776	$2^5 * 3 * 7 * 83$
59808	$2^5 * 3 * 7 * 89$
65184	$2^5 * 3 * 7 * 97$
67872	$2^5 * 3 * 7 * 101$
69216	$2^5 * 3 * 7 * 103$
71904	$2^5 * 3 * 7 * 107$
73248	$2^5 * 3 * 7 * 109$
75936	$2^5 * 3 * 7 * 113$
85344	$2^5 * 3 * 7 * 127$
88032	$2^5 * 3 * 7 * 131$
92064	$2^5 * 3 * 7 * 137$
93408	$2^5 * 3 * 7 * 139$
32928	$2^5 * 3 * 7^3$
35616	$2^5 * 3 * 7 * 53$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
15288	$2^3 * 3 * 7^2 * 13$
12720	$2^4 * 3 * 5 * 53$
35904	$2^6 * 3 * 11 * 17$
96048	$2^4 * 3^2 * 23 * 29$
43008	$2^{11} * 3 * 7$

第二ブロックには天与の解

表 24: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-37$	
19	19
$D=-36$	
26	$2*13$
90	$2*3^2*5$
96	2^5*3
792	2^3*3^2*11
1020	$2^2*3*5*17$
5472	2^5*3^2*19
$D=-33$	
17	17
32	2^5
$D=-32$	
300	2^2*3*5^2
$D=-31$	
21	$3*7$

16 (1,1,2) 宇宙完全数

(1,1,2) 宇宙完全数について計算結果を見る.
固有完全数は素数 q.
i. $k_0=q$ のとき $D_0=\sigma(q)-\varphi(q)=2$.
(1,1,2) 宇宙完全数の解は次の方程式の解.

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$$

解は q と異なる素数 p について解は qp.
土屋によると,$\sigma(a)+1\varphi(a)-2a=2$ の解は $a=q_1q_2:(q_1,q_2)$ は相異なる素数のみ.
したがって, この場合も天与の解がなことがわかり完全解決した.

表 25: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-30$	
22	$2*11$
40	2^3*5
42	$2*3*7$
$D=-29$	
144	2^4*3^2
$D=-28$	
28	2^2*7
84	2^2*3*7
252	2^2*3^2*7
756	2^2*3^3*7
2268	2^2*3^4*7
6804	2^2*3^5*7
$D=-25$	
13	13
$D=-24$	
168	2^3*3*7
2808	2^3*3^3*13

17　(1,2,3) 宇宙完全数

これは今まで研究がなされた.

18　(2,3,5) 宇宙完全数

(2,3,5) 宇宙完全数について計算結果を見る.
この結果は固有完全数が 1,4,6 であることを意味する (しかし証明は無い)

表 26: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D = -21$	
11	11
15	$3 * 5$
72	$2^3 * 3^2$
$D = -20$	
48	$2^4 * 3$
$D = -18$	
14	$2 * 7$
20	$2^2 * 5$
30	$2 * 3 * 5$
630	$2 * 3^2 * 5 * 7$
2310	$2 * 3 * 5 * 7 * 11$
$D = -17$	
16	2^4
36	$2^2 * 3^2$
$D = -16$	
336	$2^4 * 3 * 7$
$D = -15$	
18	$2 * 3^2$
$D = -14$	
9	3^2
$D = -13$	
7	7

i. $k_0 = 1$ のとき $D_0 = 2\sigma(k_0) - 3\varphi(k_0) = 5k_0 - 4\varphi(k_0) = 1$.

この解は, 素数 p または 3^e なのであろう.
$k_0 = 1$ なので $p = k_0 p$ が解なのは当然である.
しかし 3^e は思いがけない解なのでこれを天与の解 (gifted solution) という.
ii. $k_0 = 4$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 8$.

表 27: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-12$	
10	$2*5$
24	2^3*3
60	2^2*3*5
$D=-9$	
5	5
8	2^3
$D=-8$	
12	2^2*3
$D=-6$	
6	$2*3$
$D=-5$	
3	3
4	2^2
$D=-3$	
2	2
$D=0$	
120	2^3*3*5
672	2^5*3*7

表 28: e

e	$a_0=2E-21$	$E=2^e$	$a=E*a_0$
4	11	32	352
5	43	64	2752
6	107	128	13696
8	491	512	251392
10	2027	2048	4151296
12	8171	8192	66936832
13	16363	16384	268091392

iii. $k_0=6$ のとき $D_0=5k_0-\varphi(k_0)=18$.

表 29: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=0, m=0$

a	素因数分解	D_0
1	1	-1
4	2^2	8
6	$2*3$	18

表 30: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=1, m=-1$

a	素因数分解
$m=-D_0=-1$	
2	2
3	3
5	5
7	7
9	3^2
11	11
13	13
17	17
19	19
23	23
27	3^3
29	29
31	31
37	37
41	41
43	43
47	47
53	53
59	59
61	61

19 素数の積み上げ解

$m=2$ のときの解は面白い.

このように素数の積が順次の解の場合には 素数の積み上げ解という. あたかも石垣に自然石を用いて作ったような面影があるから, この名前を選んだ.

$F(a)=2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a, F(a)=-2$ について $a'=ap$ とおくとき

$F(a')=(2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a)p+2\sigma(a)-3\varphi(a)=-2p+2\sigma(a)-3\varphi(a)$ となる.

表 31: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=8, m=-8$

a	素因数分解
$m=-D_0=-8$	
12	2^2*3
20	2^2*5
28	2^2*7
44	2^2*11
52	2^2*13
68	2^2*17
76	2^2*19
92	2^2*23
116	2^2*29
124	2^2*31
148	2^2*37
164	2^2*41
172	2^2*43
188	2^2*47
212	2^2*53
236	2^2*59

表 32: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=18, m=-18$

a	素因数分解
$m=-D_0=-18$	
30	$2*3*5$
42	$2*3*7$
66	$2*3*11$
78	$2*3*13$
102	$2*3*17$
114	$2*3*19$
138	$2*3*23$
174	$2*3*29$
186	$2*3*31$
222	$2*3*37$
246	$2*3*41$
258	$2*3*43$

表 33: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-2, m=2$

a	素因数分解
10	$2*5$
130	$2*5*13$
23530	$2*5*13*181$

$F(a')=2$ を仮定すると $-2=F(a')=-2p+2\sigma(a)-3\varphi(a)$ となる.

$$2p=2+2\sigma(a)-3\varphi(a)=5a+2-6\varphi(a)$$

20 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.
$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=A+B-C=0$
$k_0=1$ なので無数の素数 p について解となり $D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)=A-B$.
ここで素数 q がありそのべき $q^\eta,(\eta>1)$ が解であると仮定する.
$a=q^\eta, R_1=q^{\eta-1}$ とおき これらの $\sigma(a),\varphi(a)$ を計算する.
$a=q^\eta$ のとき
$\overline{q}\sigma(a)=q^2R_1-1, \varphi(a)=\overline{q}R_1, a=qR_1$ なので,$X=q^2R_1-1, Y=\overline{q}R_1$ とおくと,

$$Aq^2R_1-A+B\overline{q}Y-CqY=(A-B)\overline{q} \tag{1}$$

$B\overline{q}Y-CqY=Y(B\overline{q}-Cq)=\overline{q}R_1(B\overline{q}-Cq), C=A+B$ に注意し R_1 の 1 次式に直しその係数を Γ とおくと

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= Aq^2 + \overline{q}(B\overline{q} - (A+B)q) \\
&= Aq^2 + B\overline{q}^2 - (A+B)q\overline{q}) \\
&= Aq^2 + B(q^2 - 2q + 1) - (A+B)(q^2 - q) \\
&= B(-2q+1) + (A+B)q \\
&= Aq - \overline{q}B
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\Gamma = Aq - \overline{q}B.$$

これより式 (2) を変形して

$$R_1\Gamma = A + A\overline{q} \quad - B\overline{q} \tag{2}$$

ゆえに

$$R_1(Aq - \overline{q}B) = A + A\overline{q} \quad - B\overline{q} = Aq \quad - B\overline{q} \tag{3}$$

A でまとめて

$$A(R_1 - 1)q = \overline{q}B(R_1 - 1).$$

$R_1 = q^{\eta-1} - 1 > 0$ によってこれを除して
$Aq = B\overline{P}$ がでて

$$\frac{B}{A} = \frac{q}{\overline{P}}.$$

この左の項と右の項は既約分数なので $A = \overline{P}, B = q$. よって, $A = B - 1$.
End

$(A+B-C)p+A-B=A-B$ により $A+B-C=0$. さらに $A=B-1$　なので, $C=2B-1$.

命題 1 $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ ならば素数 p を解に持つ.

定理 2 $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ 素数べき $q^{\varepsilon}, (\varepsilon>1)$ を解に持つのは
B が素数の時で $B=q$ になる.

$B=5$ なら (4,5,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0=1$ のときの宇宙完全数は 素数 p と 5^{ε} が解であり, 後者を天与の解 (gifted solution) という.