極超完全数について

飯高 茂

平成 32 年 5 月 17 日

1 乗数付の極超完全数

$q=2^{e+1}-1$ を素数とするとき,$\alpha=2^eq$ は完全数となる. すなわち, $\sigma(\alpha=2\alpha$ を満たす.
$2^{e+1}-1$ を m だけ平行移動し, さらに 素数 h 倍する.
すなわち $a=h*2^{e+1}+m-1$ を素数と仮定する.
すると, $\sigma(a)=a+1=h*2^{e+1}+m$. $\sigma(a)-m=h*2^{e+1}$ となるので,
$A=\sigma(a)-m$ とおけば $A=h*2^{e+1}$ となる.
$h*2^{e+1}=a-m+1$ を用いて式変形する.

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\sigma(h*2^{e+1})\\&=(h+1)(2^{e+2}-1)\\&=2h*2^{e+1}-h+2^{e+2}-1\\&=2(a+1-m)-h+2^{e+2}-1\end{aligned}$$

これより,

$$\sigma(A)=2(a+1-m)-h+2^{e+2}-1.$$

h 倍すると

$$h\sigma(A)=2h(1+a-m)-h^2+2*2^{e+1}*h-h.$$

$a+1-m=h*2^{e+1}$ を これに代入して

$$h\sigma(A)=2h(a+1-m)-h^2+2(a+1-m)-h=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h).$$

かくして $h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$ を得た.
そこで, $a=h*2^{e+1}+m-1$ を素数と仮定したことを忘れて 未知自然数 a,A についての連立方程式

$$A=\sigma(a)-m, h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h) \tag{1}$$

を, 自然数 a,A についての平行移動 m, 乗数 h の極超完全数の連立定義式.
a を 極超完全数 (Ultra high perfect numbers),A をそのパートナーと呼ぶ.

注意 1 $h=3$ なら 定義式は

$$A=\sigma(a)-m, 3\sigma(A)=8a-4-8m.$$

さてあらためて a を 平行移動 m, 乗数 h の極超完全数とする.
そこで a:素数とすると $A=\sigma(a)-m=a+1-m$ により $a=A+m-1$.
これより, $h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
h\sigma(A) &= 2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h) \\
&= 2(A+m-1)(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h) \\
&= 2(A-1)(h+1)+2+h-h^2 \\
&= 2(h+1)A-h-h^2.
\end{aligned}$$

したがって

$$h\sigma(A)=2(h+1)A-h-h^2.$$

ここで m が消失したことに注意.
まとめて次の結果を得る.

命題 1 平行移動 m, 乗数 h の極超完全数 a を素数とすると $h\sigma(A)=2(h+1)A-h-h^2$.

$h=3$ なら $3\sigma(A)=8A-12$.

A は 3 の倍数なので, 自然数 B により $A=3B$ と書ける.
$3 \nmid B$ と仮定すると, $3\sigma(A)=3\sigma(3B)=12\sigma(B), 8A-12=24B-12$.
$3\sigma(A)=8A-12$ によれば $\sigma(B)=2B-1$.
ここで概完全数予想を使うと. $\sigma(B)=2B-1$ によって, $B=2^e$ と書ける. よって, $A=3*2^e$.
$a=A+m-1=A-1=3*2^e-1$ が素数.
これは 乗数 3 のメルセンヌ素数である.

これを念頭に次のパソコンでの結果を見てみよう.

表 1: 極超完全数, $h=3, m=0$

e	a	素因数分解	A	素因数分解
0	2	2	3	3
1	5	5	6	$2*3$
2	11	11	12	2^2*3
3	23	23	24	2^3*3
4	47	47	48	2^4*3
6	191	191	192	2^6*3
7	383	383	384	2^7*3
11	6143	6143	6144	$2^{11}*3$
18	786431	786431	786432	$2^{18}*3$
*	98	$2*7^2$	171	3^2*19
*	683	683	684	2^2*3^2*19(ビックリ解)

$A=2^e*3$ のときは $a=A-1=2^e*3-1$ が素数になるので, これは乗数 3 のメルセンヌ素数である.

$A=2^e*3$ にならない場合は e には * を書いている.

このように a が素数でも $A=2^e*3$ にならない場合があることに注意したい.

a が素数なら,$m=0$ により $A=\sigma(a)-m=a+1$.

$A=3B$. B が 3 で割れないなら, $B=2^e$. したがって $A=3*2^e$.

しかし B が 3 で割れる例が出ている.$a=683$ は素数だが $A=684=2^2*3^2*19, B=2^2*3*19$

後に 2^2*19 はビックリ,$A=2^2*19*3^2$ はビックリ解と呼ばれる特別な解になる.

さらに a が素数にならない例 $a=98=2*7^2$ もあることに注意.

1.1 $h=3, m=1$ の場合

表 2: 極超完全数, $h=3, m=1$

e	$a=2^e*3$	素因数分解	A	素因数分解
0	3	3	3	3
1	6	$2*3$	11	11
3	24	2^3*3	59	59
5	96	2^5*3	251	251
9	1536	2^9*3	4091	4091
15	98304	$2^{15}*3$	262139	262139
17	393216	$2^{17}*3$	1048571	1048571

ここでは A:素数で $a=2^e*3$ の例ばかりである.
$A=2^{e+3}-5$ が素数 によって解が特徴づけられる.

1.2 $m=1$ の場合

一般の h について $m=1$ の場合に, A が素数のときを考える.
連立定義式: $A=\sigma(a)-m, h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$ について $m=1$ とすると

$$A=\sigma(a)-1, h\sigma(A)=2a(h+1)-h-h^2$$

A を素数とすると $\sigma(A)=A+1$ なので $\sigma(A)=A+1=\sigma(a)$ であり, これを代入する.
$h\sigma(A)=h\sigma(a)=2a(h+1)-h-h^2$ によって

$$h\sigma(a)=2a(h+1)-h-h^2$$

h は奇数素数なので, $a\equiv 0 \bmod h$.
$a=h\alpha$ と書ける. ここで安易にも
仮定:
h と α は互いに素.$(h \nmid \alpha)$
を使う.
$h\sigma(a)=2a(h+1)-h-h^2$ に $a=h\alpha$ を代入すると,

$$h*(h+1)\sigma(\alpha)=2\alpha*h(h+1)-h-h^2.$$

h で割ると,

$$(h+1)\sigma(\alpha)=2\alpha*(h+1)-(1+h).$$

$h+1$ で割ると, $\sigma(\alpha)=2\alpha-1$. ここで概完全数予想によって, $\alpha=2^e$. よって, $a=h*2^e$.
実例からみると $m=1$ なら A:素数になるかもしれない.

表 3: 極超完全数, $h = 3$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -5$			
54	$2 * 3^3$	125	5^3
$m = -4$			
7	7	12	$2^2 * 3$
19	19	24	$2^3 * 3$
43	43	48	$2^4 * 3$
379	379	384	$2^7 * 3$
1531	1531	1536	$2^9 * 3$
3067	3067	3072	$2^{10} * 3$
24571	24571	24576	$2^{13} * 3$
217	$7 * 31$	260	$2^2 * 5 * 13$
10	$2 * 5$	22	$2 * 11$
2737	$7 * 17 * 23$	3460	$2^2 * 5 * 173$
$m = -3$			
2	2	6	$2 * 3$
1226	$2 * 613$	$1,845$	$3^2 * 5 * 41$
$m = -2$			
3	3	6	$2 * 3$
93	$3 * 31$	130	$2 * 5 * 13$
1173	$3 * 17 * 23$	1730	$2 * 5 * 173$

表 4: 極超完全数, $h=3$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=2$			
7	7	6	$2*3$
13	13	12	2^2*3
97	97	96	2^5*3
193	193	192	2^6*3
769	769	768	2^8*3
12289	12289	12288	$2^{12}*3$
286	$2*11*13$	502	$2*251$
$m=3$			
5	5	3	3
$m=4$			
57	$3*19$	76	2^2*19
1107	3^3*41	1676	2^2*419
$m=5$			
7	7	3	3
19768	$2^3*7*353$	42475	5^2*1699
$m=6$			
11	11	6	$2*3$
17	17	12	2^2*3
29	29	24	2^3*3
53	53	48	2^4*3
101	101	96	2^5*3
197	197	192	2^6*3
389	389	384	2^7*3
773	773	768	2^8*3
49157	49157	49152	$2^{14}*3$
196613	196613	196608	$2^{16}*3$

a:素数の解ばかり

2 a: 素数のとき

a: 素数のときパートナー A は何になるか.
連立定義式 $A=\sigma(a)-m, h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$
において, $\sigma(a)=a+1$ のとき, $A=\sigma(a)-m=a+1-m$ なので $a=A+m-1$.
$h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
h\sigma(A) &= 2a(h+1) + 2 + h - h^2 - 2m(1+h) \\
&= 2(A+m-1)(h+1) + 2 + h - h^2 - 2m(1+h) \\
&= 2(A-1)(h+1) + 2 + h - h^2 \\
&= 2A(h+1) - h(h+1)
\end{aligned}
$$

よって

$$h\sigma(A) = 2A(h+1) - h(h+1)$$

命題 2 *a: 素数のときパートナー A は $h\sigma(A) = 2A(h+1) - h(h+1)$ を満たす.*

この逆も成り立つ.
これより h は A の約数なので自然数 B により $A = hB$ と書ける.

1. h が B の約数ではないとき.
$h\sigma(A) = h(h+1)\sigma(B) = 2h(h+1)B - h(h+1)$ なので,

$$(h+1)\sigma(B) = 2(h+1)B - (h+1).$$

$h+1$ で割るとき $\sigma(B) = 2B - 1$.
ここで概完全数予想を使うと $B = 2^e$. よって $A = h * 2^e$

2. h が A の指数 2 の素因数のとき.
$A = h^2B, (h \not| B)$ のとき,

$$(1 + h + h^2)\sigma(B) = 2h(h+1)B - (1+h).$$

パソコンで解を探した.

1. $h = 3$ のとき $B = 2^2 * 19$
2. $h = 7$ のとき $B = 110 = 2 * 5 * 11, 1136 = 2^4 * 71$
3. $h = 13$ のとき $B = 3104 = 2^5 * 97$

これらの解をビックリの種と呼び,$A = h^2B$ をビックリ解という.
a: 素数のときパートナー A は $A = h * 2^e$ またはビックリ解になると想像される.

3　ビックリ方程式

$h\sigma(A) = 2A(h+1) - h(h+1)$ をビックリ方程式という.

詳しく計算したら案外うまく行った.(この計算をしたのは, 緊急事態宣言が出された中で部屋に居ることが多くなったせいである. ビックリのおかげです, というのは言い過ぎである)

$A = h^2B, (h \nmid B)$ のとき,

$\sigma(A) = \sigma(h^2)\sigma(B), \widetilde{h} = h+1$ を用いて $h\sigma(A) = 2A(h+1) - h(h+1)$ を次の形に書き換える.

$$h\sigma(A) = 2A\widetilde{h} - h\widetilde{h}$$

$h\sigma(A) = h\sigma(h^2)\sigma(B) = 2\widetilde{h}h^2B - h\widetilde{h} = 2h^2B\widetilde{h} - h\widetilde{h}$ をえるのでこれより

$$\sigma(h^2)\sigma(B) = (2hB-1)\widetilde{h}$$

ここで実例を参考にして $B = 2^eQ, (Q:$ 奇素数$)$ と仮定する.

$N = 2^{e+1} - 1$ とおく.

$\sigma(B) = \sigma(2^e)\sigma(Q) = N\sigma(Q) = N(Q+1)$ により $\sigma(h^2)\sigma(B) = (2hB-1)\widetilde{h}$ に代入する.

$\sigma(h^2)\sigma(B) = \sigma(h^2)N(Q+1) = (2hB-1)\widetilde{h} = h\widetilde{h}(N+1)Q - \widetilde{h}$ により

$$\sigma(h^2)N(Q+1) = \sigma(h^2)NQ + \sigma(h^2)N = h\widetilde{h}(N+1)Q - \widetilde{h}$$

Q の 1 次式でまとめて

$$(h\widetilde{h}(N+1) - \sigma(h^2)N)Q = \sigma(h^2)N + \quad \widetilde{h}.$$

Q の係数は

$$h\widetilde{h}(N+1) - \sigma(h^2)N = (h\widetilde{h} - \sigma(h^2))N + h\widetilde{h}$$

$\sigma(h^2) = 1 + h + h^2 = 1 + h(1+h) = 1 + h\widetilde{h}$ によって,

$$(h\widetilde{h} - \sigma(h^2))N + h\widetilde{h} = h\widetilde{h} - N.$$

ゆえに,

$$(h\widetilde{h} - N)Q = \sigma(h^2)N + \quad \widetilde{h} > 0.$$

よって, $h\widetilde{h} - N > 0$.

i. $h = 3$. このとき $\sigma(h^2) = 13, N = 2^{e+1} - 1$.

$h\widetilde{h} = 12 - N = 13 - 2^{e+1} > 0$. よって, $e = 1, 2$.

$e = 1$ ならば, $N = 3$

$(h\widetilde{h} - N)Q = (12-3)Q = 9Q = \sigma(h^2)N + \quad \widetilde{h} = 13N + 4 = 43 > 0$. 解なし.

$e=2$ ならば, $N=7$

$$(h\widetilde{h}-N)Q=(12-7)Q=5Q=\sigma(h^2)N+\quad\widetilde{h}=13*7+4=95.$$

解は $Q=19, B=2^2*19, A=3^2*2^2*19$.

ii. $h=5$. このとき $\sigma(h^2)=31, N=2^{e+1}-1$. 解はないことが分かる.

iii. $h=7$. このとき $\sigma(h^2)=57, N=2^{e+1}-1$.
$(h\widetilde{h}-N)Q=(56-N)Q=57N+\quad 8$.
$0<56-N=57-2^{e+1}$ なので, $e\leq 4$.
$e=4$ ならば, $N=31$.

$$(h\widetilde{h}-N)Q=(56-31)Q=25Q=\sigma(h^2)N+\quad\widetilde{h}=57*31+8=1775.$$

$Q=71$.

これを定理にするには $A=h^\eta B, (h\not|B, \eta\geq 3)$ には解がないことを示すなどが必要である.
実際には, 概完全数予想を解くことが必要である.
$a=p$(素数), $A=\sigma(a)-m=p+1-m$
$A=h*2^e$ のとき,
$p=h*2^e-1+m$ は素数. これは 乗数 h , 平行移動 m のメルセンヌ素数.
極超完全数が素数なら, 乗数 h , 平行移動 m のメルセンヌ素数となり気持ちがたかぶる.

4　逆定理

パートナー A が ビックリ方程式 を満たすならば a は 素数になる.

定理 1 パートナー A が $h\sigma(A)=2A(h+1)-h(h+1)$ を満たすならば a は 素数.

Proof
$h\sigma(A)=2A\widetilde{h}-h*\widetilde{h}$ と書き換えて, さらに極超完全数の定義式
$A=\sigma(a)-m, h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)=2a\widetilde{h}+2+h-h^2-2m\widetilde{h}$
において $2a\widetilde{h}+2+h-h^2-2m\widetilde{h}=h\sigma(A)=2A\widetilde{h}-h*\widetilde{h}$
により

$$2a\widetilde{h}+2+h-h^2-2m\widetilde{h}=2A\widetilde{h}-h*\widetilde{h}$$

$A=\sigma(a)-m$ を代入して

$$2a\widetilde{h}+2+h-h^2-2m\widetilde{h}=2(\sigma(a)-m)\widetilde{h}-h*\widetilde{h}=2\sigma(a)\widetilde{h}-2m\widetilde{h}-h*\widetilde{h}$$

によって

$$2a\widetilde{h}+2+h-h^2-2m\widetilde{h}=2\sigma(a)\widetilde{h}-2m\widetilde{h}-h*\widetilde{h}$$

整理して

$$2a\widetilde{h}+2+h-h^2=2\sigma(a)\widetilde{h}-h-h^2$$

$$a+1=\sigma(a).$$

よって a:素数.

q.e.d.

これは次の結果の一般化である.

定理 2 平行移動 m, 乗数 h の極超完全数 a, A において $A=2^e*h$ とすると a は 素数になる.

Proof

極超完全数の定義式

$$A=\sigma(a)-m, h\sigma(A)=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$$

を $A=2^e*h, N=2^{e+1}-1$ を用いて書き直す.

$\sigma(a)=A+m=2^e*h+m, h\sigma(A)=h(h+1)N=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h).$

$2\sigma(a)=2^{e+1}*h+2m=(N+1)*h+2m=N*h+h+2m$

$\overline{h}=h+1$ 倍すると,

$$2\overline{h}\sigma(a)=N*h*(h+1)+h*(h+1)+2m*(h+1).$$

$h(h+1)N=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}2\overline{h}\sigma(a)&=N*h*(h+1)+h*(h+1)+2m*(h+1)\\&=2a(h+1)+2+h-h^2-2m(1+h)+h*(h+1)+2m*(h+1)\\&=2a(h+1)+2+h-h^2+h*(h+1)\\&=2a(h+1)+2+2h\end{aligned}$$

$$2\overline{h}\sigma(a)=2a(h+1)+2+2h=2\overline{h}(a+1).$$

$\sigma(a)=a+1$ が得られて, a は素数となる.

q.e.d.

5 極超完全数, $h = 5$

表 5: 極超完全数, $h = 5$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -2$			
2	2	5	5
7	7	10	$2 * 5$
17	17	20	$2^2 * 5$
37	37	40	$2^3 * 5$
157	157	160	$2^5 * 5$
317	317	320	$2^6 * 5$
1277	1277	1280	$2^8 * 5$
2557	2557	2560	$2^9 * 5$
20477	20477	20480	$2^{12} * 5$
$m = -1$			
3	3	5	5
578	$2 * 17^2$	922	$2 * 461$
$m = 0$			
19	19	20	$2^2 * 5$
79	79	80	$2^4 * 5$
1279	1279	1280	$2^8 * 5$
5119	5119	5120	$2^{10} * 5$
20479	20479	20480	$2^{12} * 5$

ビックリ解　が無いので気持ちがいい.

表 6: 極超完全数 $h=5$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m=1$			
5	5	5	5
10	$2*5$	17	17
20	2^2*5	41	41
40	2^3*5	89	89
320	2^6*5	761	761
5120	$2^{10}*5$	12281	12281
40960	$2^{13}*5$	98297	98297

表 7: 極超完全数 $h = 5$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 2$			
11	11	10	$2 * 5$
41	41	40	$2^3 * 5$
641	641	640	$2^7 * 5$
40961	40961	40960	$2^{13} * 5$
16	2^4	29	29
5066	$2 * 17 * 149$	8098	$2 * 4049$
$m = 3$			
7	7	5	5
297	$3^3 * 11$	477	$3^2 * 53$
$m = 4$			
13	13	10	$2 * 5$
23	23	20	$2^2 * 5$
43	43	40	$2^3 * 5$
83	83	80	$2^4 * 5$
163	163	160	$2^5 * 5$
643	643	640	$2^7 * 5$
1283	1283	1280	$2^8 * 5$
10243	10243	10240	$2^{11} * 5$
20483	20483	20480	$2^{12} * 5$
303	$3 * 101$	404	$2^2 * 101$

6 極超完全数, $h = 7$

表 8: 極超完全数, $h = 7$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -1$			
5	5	7	7
$m = 0$			
13	13	14	$2 * 7$
223	223	224	$2^5 * 7$
3583	3583	3584	$2^9 * 7$
55663	55663	55664	$2^4 * 7^2 * 71$(ビックリ解)
$m = 1$			
7	7	7	7
14	$2 * 7$	23	23
224	$2^5 * 7$	503	503
896	$2^7 * 7$	2039	2039
57344	$2^{13} * 7$	131063	131063
182	$2 * 7 * 13$	335	$5 * 67$
476	$2^2 * 7 * 17$	1007	$19 * 53$
20216	$2^3 * 7 * 19^2$	45719	$131 * 349$
37310	$2 * 5 * 7 * 13 * 41$	84671	$227 * 373$

$h = 3, 5$ のとき $m = 1$ なら A

表 9: 極超完全数, $h = 7$

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 2$			
29	29	28	$2^2 * 7$
113	113	112	$2^4 * 7$
449	449	448	$2^6 * 7$
1107	$3^3 * 41$	1678	$2 * 839$
39411	$3^2 * 29 * 151$	59278	$2 * 107 * 277$
$m = 3$			
58	$2 * 29$	87	$3 * 29$
$m = 4$			
17	17	14	$2 * 7$
31	31	28	$2^2 * 7$
59	59	56	$2^3 * 7$
227	227	224	$2^5 * 7$
57347	57347	57344	$2^{13} * 7$
5393	5393	5390	$2 * 5 * 7^2 * 11$ (ビックリ解)
55667	55667	55664	$2^4 * 7^2 * 71$ (ビックリ解)