

最新式超完全数について ビックリ方程式

飯高 茂

平成 32 年 5 月 17 日

1 まえがき

ここでは新型完全数の一つとして新型超完全数を導入しこれを詳しく調べる.

2 乗数付の最新式超完全数

$h > 2$ を素数とし, $a = h * 2^e$ とおく. $N = 2^{e+1} - 1$ を用いると
 $\sigma(a) = N(h + 1) = Nh + N = h(2^{e+1} - 1) + N = 2a - h + N$ となる.
 m は整数とする.
 $\sigma(a) + m$ は正, かつ素数と仮定する.
そこで $A = \sigma(a) + m$ とおくと, $A = 2a - h + N + m$.
 $\sigma(A) = A + 1 = 2a - h + N + 1 + m = 2a - h + 2^{e+1} + m$.
 h 倍して,

$$h\sigma(A) = 2ah - h^2 + 2^{e+1}h + mh = 2ah - h^2 + 2a + mh = 2a(h + 1) - h^2 + mh.$$

かくして得られた, a, A についての連立方程式

$$A = \sigma(a) + m, h\sigma(A) = 2a(h + 1) - h^2 + mh$$

を満たす a を乗数 h , 平行移動 m の最新式超完全数といい, A をそのパートナーという.

命題 1 a を乗数 h , 平行移動 m の最新式超完全数, A をそのパートナーとするとき, $a = h * 2^e$ を満たすなら A は素数.

Proof $a = h * 2^e$ を仮定して $\sigma(A) = A + 1$ を示す.

仮定によって,

$h\sigma(A) = 2a(h + 1) - h^2 + mh = 2 * 2^e * h(h + 1) - h^2 + mh$ なので h を払って,
 $\sigma(A) = 2 * 2^e * (h + 1) - h + m$.

一方, $A = \sigma(a) + m = N(h + 1) + m = 2^{e+1}(h + 1) + m - (h + 1) = \sigma(A) - 1$.

q.e.d.

しかしこの 逆は成り立たない. そこが面白い.

3 逆定理

命題 2 a を乗数 h , 平行移動 m の最新式超完全数, A をそのパートナーとすると, A が素数なら $h\sigma(a) = 2a(h+1) - h - h^2$ を満たす.

Proof $\sigma(A) = A + 1$ を仮定して $h\sigma(a) = 2a(h+1) - h - h^2$ を示す.

q.e.d.

$h\sigma(a) = 2a(h+1) - h - h^2$ から素数 h は a の因数なので, $a = hb$ と書ける.

1. $h \nmid b$ のとき $\sigma(b) = 2b - 1$ を満たす. 概完全数予想により $b = 2^e; a = 2^e$.

2. $a = h^2b$ と書けるとする.

以下略す.

4 乗数 $h = 3$ のとき

$a = 2^e * h$ とすると, $\sigma(a) = N * (h+1) = 2^{e+1}(h+1) - (h+1)$ なので,

$h = 3$ なら $A = \sigma(a) + m = 2^{e+1}(h+1) - (h+1) + m = 2^{e+3} + m - 4$ になる.

定理によって, $a = 2^e * 3$ のとき, $A = m + \sigma(a) = 2^{e+3} + m - 4$ は素数 q になる.
 $q = 2^{e+3} + m - 4$ を満たす.

$m = 3$ なら, $A = m + \sigma(a) = 2^{e+3} - 1$ はメルセンヌ素数.

$m = 5$ なら, $A = m + \sigma(a) = 2^{e+3} + 1$ はフェルマ素数.

表 1: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -9$			
6	$2 * 3$	3	3
12	$2^2 * 3$	19	19
192	$2^6 * 3$	499	499
3072	$2^{10} * 3$	8179	8179
49152	$2^{14} * 3$	131059	131059
684	$2^2 * 3^2 * 19$ (ビツクリ解)	1811	1811
$m = -7$			
6	$2 * 3$	5	5
24	$2^3 * 3$	53	53
384	$2^7 * 3$	1013	1013
98304	$2^{15} * 3$	262133	262133

表 2: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -5$			
6	$2 * 3$	7	7
12	$2^2 * 3$	23	23
192	$2^6 * 3$	503	503
768	$2^8 * 3$	2039	2039
49152	$2^{14} * 3$	131063	131063
237	$3 * 79$	315	$3^2 * 5 * 7$
70932	$2^2 * 3 * 23 * 257$	173371	$11 * 15761$
$m = -3 = -3$			
9	3^2	10	$2 * 5$

表 3: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -1$			
3	3	3	3
6	$2 * 3$	11	11
24	$2^3 * 3$	59	59
96	$2^5 * 3$	251	251
384	$2^7 * 3$	1019	1019
1536	$2^9 * 3$	4091	4091
98304	$2^{15} * 3$	262139	262139
$m = 1$			
3	3	5	5
6	$2 * 3$	13	13
12	$2^2 * 3$	29	29
24	$2^3 * 3$	61	61
192	$2^6 * 3$	509	509
384	$2^7 * 3$	1021	1021
1536	$2^9 * 3$	4093	4093
6144	$2^{11} * 3$	16381	16381

表 4: 乗数 $h = 3$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 3$		メルセンヌ素数	
12	$2^2 * 3$	31	31
48	$2^4 * 3$	127	127
684	$2^2 * 3^2 * 19$ (ビツクリ解)	1823	1823
3072	$2^{10} * 3$	8191	8191
49152	$2^{14} * 3$	131071	131071
$m = 3$		メルセンヌ素数	
3	3	7	7
15	$3 * 5$	27	3^3
1155	$3 * 5 * 7 * 11$	2307	$3 * 769$
$m = 5$		フェルマ素数	
6	$2 * 3$	17	17
96	$2^5 * 3$	257	257
24576	$2^{13} * 3$	65537	65537

乗数 $h = 7$, 平行移動 m

表 5: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = 7 = 7$			
3	3	11	11
6	$2 * 3$	19	19
24	$2^3 * 3$	67	67
48	$2^4 * 3$	131	131
1536	$2^9 * 3$	4099	4099
12288	$2^{12} * 3$	32771	32771
24576	$2^{13} * 3$	65539	65539
98304	$2^{15} * 3$	262147	262147
$m = 9 = 3^2$			
3	3	13	13
12	$2^2 * 3$	37	37
768	$2^8 * 3$	2053	2053

表 6: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -3^3$			
28	$2^2 * 7$	29	29
7168	$2^{10} * 7$	16349	16, 349
$m = -25 = -5^2$			
28	$2^2 * 7$	31	31
112	$2^4 * 7$	223	223
224	$2^5 * 7$	479	479
448	$2^6 * 7$	991	991
854	$2 * 7 * 61$	1463	$7 * 11 * 19$
12656	$2^4 * 7 * 113$	28247	$47 * 601$

表 7: 乗数 h , 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -23$			
56	$2^3 * 7$	97	97
896	$2^7 * 7$	2017	2,017
3584	$2^9 * 7$	8161	8,161
5390	$2 * 5 * 7^2 * 11$ (ビツクリ解)	12289	12,289
57344	$2^{13} * 7$	131041	131,041
$m = -21 = -3 * 7$			
14	$2 * 7$	3	3
112	$2^4 * 7$	227	227
$m = -19$			
14	$2 * 7$	5	5
28	$2^2 * 7$	37	37
56	$2^3 * 7$	101	101
112	$2^4 * 7$	229	229
448	$2^6 * 7$	997	997

表 8: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -17$			
14	$2 * 7$	7	7
56	$2^3 * 7$	103	103
224	$2^5 * 7$	487	487
3584	$2^9 * 7$	8167	8, 167
21	$3 * 7$	15	$3 * 5$
63	$3^2 * 7$	87	$3 * 29$
189	$3^3 * 7$	303	$3 * 101$
567	$3^4 * 7$	951	$3 * 317$
5103	$3^6 * 7$	8727	$3 * 2909$
15309	$3^7 * 7$	26223	$3 * 8741$
45927	$3^8 * 7$	78711	$3 * 26237$
55664	$2^4 * 7^2 * 71$ (ビックリ解)	127207	127, 207
$m = -15$			
28	$2^2 * 7$	41	41
112	$2^4 * 7$	233	233
1792	$2^8 * 7$	4073	4, 073
7168	$2^{10} * 7$	16361	16, 361

表 9: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -13$			
14	$2 * 7$	11	11
28	$2^2 * 7$	43	43
56	$2^3 * 7$	107	107
224	$2^5 * 7$	491	491
896	$2^7 * 7$	2027	2,027
3584	$2^9 * 7$	8171	8,171
7168	$2^{10} * 7$	16363	16,363
$m = -11$			
14	$2 * 7$	13	13
56	$2^3 * 7$	109	109
896	$2^7 * 7$	2029	2,029
14336	$2^{11} * 7$	32749	32,749
5390	$2 * 5 * 7^2 * 11$ (ビツクリ解)	12301	12,301
$m = -9 = -3^2$			
28	$2^2 * 7$	47	47
112	$2^4 * 7$	239	239
1792	$2^8 * 7$	4079	4,079
22204	$2^2 * 7 * 13 * 61$	48599	$23 * 2113$
28672	$2^{12} * 7$	65519	65,519
62188	$2^2 * 7 * 2221$	124423	$13 * 17 * 563$
96775	$5^2 * 7^2 * 79$	141351	$3 * 7 * 53 * 127$

表 10: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -7$			
14	$2 * 7$	17	17
56	$2^3 * 7$	113	113
112	$2^4 * 7$	241	241
448	$2^6 * 7$	1009	1,009
7168	$2^{10} * 7$	16369	16,369
28672	$2^{12} * 7$	65521	65,521
55664	$2^4 * 7^2 * 71$ (ビックリ解)	127217	127,217
$m = -5$			
7	7	3	3
14	$2 * 7$	19	19
224	$2^5 * 7$	499	499
3584	$2^9 * 7$	8179	8,179
57344	$2^{13} * 7$	131059	131,059
55664	$2^4 * 7^2 * 71$ (ビックリ解)	127219	127,219
$m = -3$			
7	7	5	5
28	$2^2 * 7$	53	53
448	$2^6 * 7$	1013	1013

表 11: 乗数 $h = 7$, 平行移動 m の最新式超完全数

a	素因数分解	A	素因数分解
$m = -1$			
7	7	7	7
14	$2 * 7$	23	23
182	$2 * 7 * 13$	335	$5 * 67$
224	$2^5 * 7$	503	503
896	$2^7 * 7$	2039	2,039
57344	$2^{13} * 7$	131063	131,063
476	$2^2 * 7 * 17$	1007	$19 * 53$
20216	$2^3 * 7 * 19^2$	45719	$131 * 349$
37310	$2 * 5 * 7 * 13 * 41$	84671	$227 * 373$
$m = 1$			
$m = 3$			
7	7	11	11
28	$2^2 * 7$	59	59
112	$2^4 * 7$	251	251
448	$2^6 * 7$	1019	1,019
1792	$2^8 * 7$	4091	4,091