数学の研究を始めよう (13)
陪関数の広い海と散在する島々

飯高 茂

平成 26 年 1 月 9 日

1　第 2 種オイラー関数と陪関数

第 2 種オイラー関数と陪関数の定義については 2014 年 3 月号に書いたが, あらためてまたオイラー関数から書くことにする.

自然数 $a>1$ に対して a 未満で a と互いに素な自然数 b の個数を $\varphi(a)$ と書き, オイラー関数と言う.

a と互いに素な自然数 $b<a$ の和を $h(a)$ と書くと $h(a)$ については乗法性が成り立たない.

$h(a)$ を少し変形して乗法性を成り立つような関数 $\varphi_1(a)$ を以下で定義する.

$a=p^e$ のとき,a より小さいが p の倍数ではない数の和は

$$\frac{p^e(p^e+1)}{2}-p\times\frac{p^{e-1}(p^{e-1}+1)}{2}=\frac{p^e(p^e-p^{e-1})}{2}.$$

なので $\varphi_1(p^e)=\frac{p^e\varphi(p^e)}{2}$ と定義する.

自然数 a の素因数分解 $a={p_1}^{e_1}\cdots{p_s}^{e_s}$ に応じて $\varphi_1(a)=\varphi_1({p_1}^{e_1})\varphi_1({p_2}^{e_2})\cdots\varphi_1({p_s}^{e_s})$ として $\varphi_1(a)$ を定義する. これを **第 2 種オイラー関数** とよぶことにする. このとき

$$\varphi_1(a)=\frac{a\varphi(a)}{2^s}$$

となる. そこで $\frac{\varphi(a)}{2^s}$ を不変数として認定し $\widetilde{\varphi}(a)$ と書き**オイラー陪関数** と呼ぶことにする. 第 2 種オイラー関数との関係は $\varphi_1(a)=\widetilde{\varphi}(a)a$ となる.

1.1　計算例

$a=60$ のとき $\widetilde{\varphi}(a)$ を求めよう.

$$\widetilde{\varphi}(60)=\widetilde{\varphi}(4)\widetilde{\varphi}(3)\widetilde{\varphi}(5)=\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot=2.$$

$a=10^e$ のとき $\widetilde{\varphi}(a)=\widetilde{\varphi}(2^e)\widetilde{\varphi}(5^e)=2^{e-1}\times5^{e-1}=10^{e-1}.$

1.2　方程式を解く

次に方程式 $\widetilde{\varphi}(a)=2$ を解いてみよう.

a が奇数のとき.

a の奇素数 q のべきの因子 q^e を持つ場合については $\widetilde{\varphi}(q^e)=(q-1)q^{e-1}/2$ となるが, 仮定からこの値は 2 のべきなので $e=1, q=3,5$.

$s=s(a)=1$ なら $q=5$. ここで $a=5$. $s\geq 2$ なら $q=15$. ここで $a=15$.

a が偶数のとき. $a=2^f k,(f>0)$ と奇数 k を用いて書けるから

$$\widetilde{\varphi}(a)=2^{f-2}\widetilde{\varphi}(k)=2.$$

$f=1$ のとき. $\widetilde{\varphi}(k)=4$. k の因子 q^e は $e=1$ かつ $q-1=2,4,8$ のいずれかであるが素数条件から q は 3, または 5. 結局この場合はおきない.

$f=2$ のとき. $\widetilde{\varphi}(k)=2$. よって $k=5,15$. これに応じて $a=20,60$.

$f=3$ のとき. $\widetilde{\varphi}(k)=1$ によって $k=3$ なので $a=24$.

解は $a=5,15,20,24,60$.

課題 方程式 $\widetilde{\varphi}(a)=3$ を解け.

2　陪関数のグラフ

陪関数 $\tilde{\varphi}(a)$ のグラフはオイラー関数のそれと似ていると予想できる．実際のグラフは次の通り．

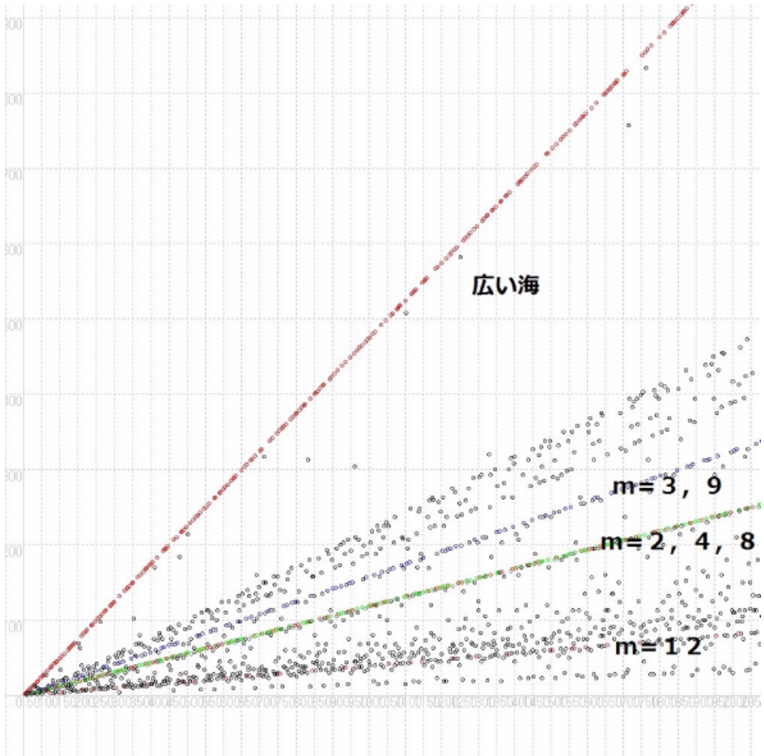

図 1: 陪関数のグラフ

グラフの左の境界線は直線 $2y = x - 1$ であるがこれは 素数の表す点が密集して直線状に見えているものである．

オイラー関数のグラフは次の通り．

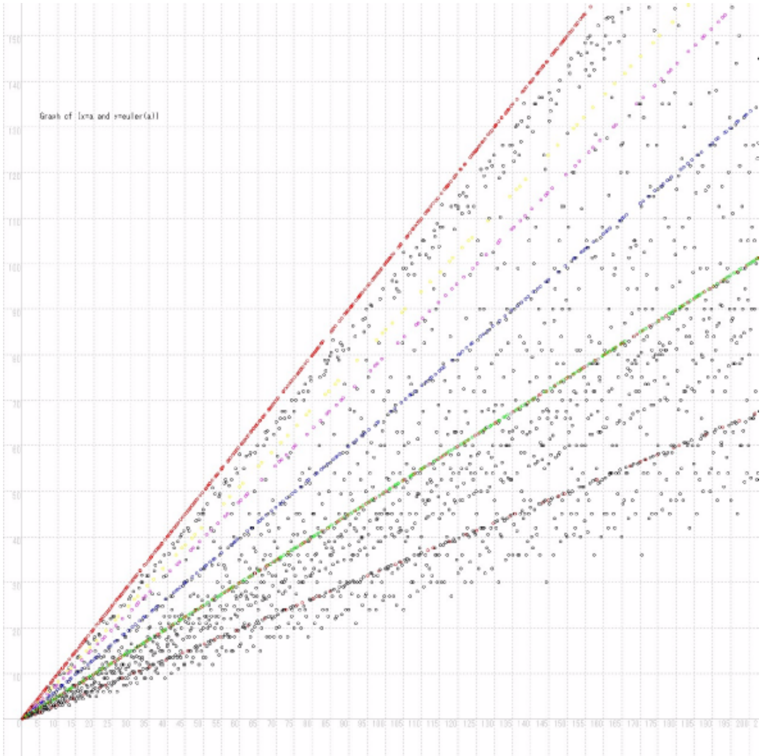

図 2: オイラー関数のグラフ

これらのグラフは著者のホームページ

`http://iitakashigeru.web.fc2.com`

内の「現代数学資料集」に大きくカラーで載せてある．

3　広い海

陪関数のグラフをしっかり観察しよう．

素数 p について $(p, \widetilde{\varphi}(p))$ が形成する直線 $2y = x - 1$ と 直線 $4y = x$ で囲まれた領域は広大な空白域だが良く見るといくつかの点が散在している．このような空白域はオイラー関数のグラフには無かったものである．

月面の裏を初めて観察した天文学者の気持ちになって $2y < x - 1, 4y > x$ で定められた領域を**広い海**と命名することにした．

この海には, 島が散在している．素数の平方 $x = p^2$ に対して $y = \widetilde{\varphi}(p) = \frac{p^2-p}{2}$ とおけば点 (x, y) は放物線 $2y = x - \sqrt{x}$ の上にありこれらはグラフ上で素数の直線 $2y = x - 1$ の下側に寄り添うように点在している．まるで弧状列島のようだ．広い海にある島々はそれぞれ, 素数の累乗に対応していると考えられる．

退職して暇ができたら,「広い海」に行って, 素数の立方 $2^3, 5^3, 7^3$ に対応した島たちを順にヨットで訪ねる旅をしてみたい．

3.1　広い海の正体

$s = s(a) \geq 2$ のとき $b = \widetilde{\varphi}(a) \leq \frac{\varphi(a)}{4} \leq \frac{a-1}{4}$. これより $x = a, y = b$ とおくと $4y < x$ を満たすので点 $(a, \widetilde{\varphi}(a))$ は広い海に入らない.

$s = 1$ のとき, $a = p^e$ と素数 p を用いて書けるから $b = \widetilde{\varphi}(a)$ とおけば $2b = p^e - p^{e-1}$ により

$$4b - a = 2p^e - 2p^{e-1} - a = p^e - 2p^{e-1} = p^{e-1}(p-2) \geq 2.$$

よって (a, b) は広い海に入る.

3.2　グラフの性質

ここで陪関数のグラフを考えてみよう.

p は素数で m の素因子でないとするとき $a = mp$ は $2\widetilde{\varphi}(a) = \widetilde{\varphi}(m)(p-1)$ を満たし, さらに $2m\widetilde{\varphi}(a) = \widetilde{\varphi}(m)a - m\widetilde{\varphi}(m)$ を満たす.

したがって各 $m > 0$ に対して直線の方程式

$$2my = \widetilde{\varphi}(m)(x - m)$$

ができる. この傾きは $\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{2m}$ なので, 同じ傾きを持つ場合を調べることが必要になる.

すなわち, 与えられた m に対し 方程式

$$\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{2m} = \frac{\widetilde{\varphi}(a)}{2a}$$

を整数 a について解かねばならない.

3.3　陪関数の比較定理

$\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{m} = \frac{\widetilde{\varphi}(a)}{a}$ が成り立つとき, m の相異なる素因子を $q_1, \cdots, q_s$ とおくと, それらのべきの積 ${q_1}^{e_1} \cdots {q_s}^{e_s} q_s$ $(e_j > 0)$ が a になる. これが陪関数の比較定理である.

例 $m = 60$ なら $\widetilde{\varphi}(m) = 2$ なので $30\widetilde{\varphi}(a) = a$.

これを満たす $a < 1000$ をパソコン君に求めてもらうと次の通り. 表をみれば分かるように 2,3,5 のそれぞれの累乗の積である.

表 1: $30\widetilde{\varphi}(a)=a$ の解

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$
30	$[2,3,5]$	1
60	$[2^2,3,5]$	2
90	$[2,3^2,5]$	3
120	$[2^3,3,5]$	4
150	$[2,3,5^2]$	5
180	$[2^2,3^2,5]$	6
240	$[2^4,3,5]$	8
270	$[2,3^3,5]$	9
300	$[2^2,3,5^2]$	10

4 エイリアンの卵問題

$L-2\widetilde{\varphi}(L)$ が素数べき q^η でかつ, q と L が互いに素な場合の解 L は**エイリアンの卵**という. このときの q を**ジーン**という.

陪関数のとき 3 はジーンにならない. しかし 5 以上の素数はジーンになる, というのは予想というより期待である.

表 2: 5 をジーンとする卵

$L(<100000)$	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(L)$	q^η	素因数分解
6	$[2,3]$	0.5	5	$[5]$
166	$[2,83]$	20.5	125	$[5^3]$
221	$[13,17]$	48	125	$[5^3]$
4166	$[2,2083]$	520.5	3125	$[5^5]$

さて 5 をジーンとする卵 は上記でつきているかもしれない. これ以上存在するかどうかどうかも分からない.

表 3: 11 をジーンとする卵

$L(<100000)$	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(L)$	q^η	素因数分解
14	$[2,7]$	1.5	11	$[11]$
15	$[3,5]$	2	11	$[11]$
1774	$[2,887]$	221.5	1331	$[11^3]$
2215	$[5,443]$	442	1331	$[11^3]$

表 4: 19 をジーンとする卵

$L(<100000)$	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(L)$	q^η	素因数分解
7802	$[2,47,83]$	471.5	6859	$[19^3]$
13483	$[97,139]$	3312	6859	$[19^3]$

表 5: 23 をジーンとする卵

$L(<100000)$	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(L)$	q^η	素因数分解
33	$[3,11]$	5	23	$[23]$
35	$[5,7]$	6	23	$[23]$
12782	$[2,7,11,83]$	307.5	12167	$[23^3]$
16222	$[2,8111]$	2027.5	12167	$[23^3]$
21287	$[7,3041]$	4560	12167	$[23^3]$
22297	$[11,2027]$	5065	12167	$[23^3]$
23927	$[71,337]$	5880	12167	$[23^3]$
23999	$[103,233]$	5916	12167	$[23^3]$

5 $a = mp$ 問題

$2m\widetilde{\varphi}(a) = \widetilde{\varphi}(m)a - m\widetilde{\varphi}(m)$ を満たす a が mp(p は素数で m の素因子でないとする) の他にあればこれを**エイリアン解**という.

m に平方因子がなければエイリアン解はない. これは先月号で証明された結果である.

表 6: $m = 5^6$ のときの解

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$
18750 $*$	$[2,3,5^5]$	625
20750 $*$	$[2,5^3,83]$	1025
20830 $*$	$[2,5,2083]$	1041
27625 $*$	$[5^3,13,17]$	2400
31250	$[2,5^6]$	3125
46875	$[3,5^6]$	6250

$*$ はエイリアン解を示す.

表 7: $m = 5^2 \times 11^2$ のときの解

a	素因数分解	$\widetilde{\varphi}(a)$
$3630\ *$	$[2, 3, 5, 11^2]$	55
$3850\ *$	$[2, 5^2, 7, 11]$	75
$5005\ *$	$[5, 7, 11, 13]$	180
6050	$[2, 5^2, 11^2]$	275
9075	$[3, 5^2, 11^2]$	550

$*$ はエイリアン解を示す.

これらの表から陪関数の場合, エイリアン解は必ず通常解の前に並んでいることが見て取れる. 彼らは礼儀正しく振る舞っているのである. そこでこのことを証明し, 陪関数のもつ優良な性質を示すことにしよう.

6　陪関数の場合のエイリアン解

$q_1,\cdots,q_u$ を相異なる素因数とし,$Q=q_1\cdots q_u, \overline{q_1}=q_1-1,\cdots,\overline{q_u}=q_u-1, \overline{Q}=\overline{q_1}\cdots\overline{q_u}$ とおく．さらに自然数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s$ に関して $m={q_1}^{\varepsilon_1}\cdots{q_u}^{\varepsilon_u}$ とし $q_1,\cdots,q_u$ と異なる素因数 p に対して $a=mp$ とおく．$q_1,\cdots,q_u$ が u 個のジーンである．

$$2m\widetilde{\varphi}(a)=\widetilde{\varphi}(m)a-m\widetilde{\varphi}(m)$$

を変形し

$$2\widetilde{\varphi}(a)=\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{m}a-\widetilde{\varphi}(m). \tag{1}$$

すると

$$\frac{\widetilde{\varphi}(m)}{m}=\frac{\overline{Q}}{2^uQ}, \widetilde{\varphi}(m)=\frac{m\overline{Q}}{2^uQ}$$

解 a を素因数分解して $a={q_1}^{e_1}\cdots{q_u}^{e_u}L, (L$ は $q_1,\cdots,q_u$ で割れない) とし $M={q_1}^{e_1}\cdots{q_u}^{e_u}$ とおくと $a=ML$.

次にすべての素因数 p_j について $e_j>0$ を背理法で証明する．そこである j については $e_j=0$ を仮定する．

q_j らの番号を付け替えて $e_1>0, e_2>0,\cdots,e_v>0, e_{v+1}=\cdots=e_u=0,$ とし $Q_v=q_1\cdots q_v, \overline{Q_v}=\overline{q_1}\cdots\overline{q_v}$ とおく．すると $M={q_1}^{e_1}\cdots{q_v}^{e_v}$, $a=ML$.

さらに $R=Q/Q_v=q_{v+1}\cdots q_u, \overline{R}=\overline{q_{v+1}}\cdots\overline{q_u}$ も使われるであろう．

$\widetilde{\varphi}(M)=\frac{\overline{Q_v}M}{2^vQ_v}$ によって

$$\widetilde{\varphi}(a)=\widetilde{\varphi}(ML)=\frac{\overline{Q_v}M}{2^vQ_v}\widetilde{\varphi}(L).$$

式 (1) によれば

$$2\widetilde{\varphi}(a)=2\times\frac{\overline{Q_v}M}{2^vQ_v}\widetilde{\varphi}(L)=\frac{\overline{Q}}{2^uQ}ML-\frac{m\overline{Q}}{2^uQ}.$$

これより

$$2^{u-v+1}M\widetilde{\varphi}(L)R=\overline{R}(ML-m).$$

$R>1$ は仮定されている．この最大素因子 q をとると, これは M と互いに素でかつ,$\overline{R}$ とも互いに素．さらに q は m と R の因子でもある．さて q は $\overline{R}ML$ の因子なので L の因子になり, これは仮定 に反する．

さて $u=v, Q_v=Q, R=1$ が分かったので $\eta_1=\varepsilon_1-e_1,\cdots,\eta_u=\varepsilon_u-e_u$ とおくと $\frac{m}{M}={q_1}^{\eta_1}\cdots{q_u}^{\eta_u}$ になり

$$co\widetilde{\varphi}(L)=L-2\widetilde{\varphi}(L)={q_1}^{\eta_1}\cdots\cdots{q_u}^{\eta_u}. \tag{2}$$

これは u 個の素数 $q_1,\cdots,q_u$ をジーンとする場合の卵の方程式である．ここで L は $q_1\cdots q_u$ と互いに素である．

6.1 礼儀正しいエイリアン

卵 L については $s(L) > 1$ が成立する.

実際, $s(L) = 1$ とすると,L は素数のべき q^w である. ここで $w > 1$ なら $2\widetilde{\varphi}(L) = q^{w-1}(q-1)$ なので q は ${q_1}^{\eta_1} \cdots\cdots {q_u}^{\eta_u}$ の素因数なので $q = q_j$ となる j があり $q_1 \cdots q_u$ と互いに素に反する.

$L = q$ のとき,$L - 2\widetilde{\varphi}(L) = q - (q-1) = 1$. これで矛盾した. よって $s(L) > 1$ なので

$$\widetilde{\varphi}(L) \leq \frac{\varphi(L)}{2^2} \leq \frac{L-1}{4}.$$

$4\widetilde{\varphi}(L) \leq L$ を変形し

$$L \leq 2(L - 2\widetilde{\varphi}(L)).$$

$q_1, \cdots, q_u$ をジーンとする場合の卵の方程式を用いると

$$L - 2\widetilde{\varphi}(L) = {q_1}^{\eta_1} \cdots\cdots {q_u}^{\eta_u}$$

なので

$$L \leq 2{q_1}^{\eta_1} \cdots\cdots {q_u}^{\eta_u}.$$

$\eta_1 = \varepsilon_1 - e_1, \cdots, \eta_u = \varepsilon_u - e_u$ によって ${q_1}^{e_1} \cdots\cdots {q_u}^{e_u}$ を掛けることによって

$${q_1}^{e_1} \cdots\cdots {q_u}^{e_u} L \leq 2{q_1}^{\varepsilon_1} \cdots\cdots {q_u}^{\varepsilon_u}.$$

$a = {q_1}^{e_1} \cdots\cdots {q_u}^{e_u} L, 2m = 2({q_1}^{\varepsilon_1} \cdots\cdots {q_u}^{\varepsilon_u})$ なので $a \leq 2m$.

a はエイリアン解であり, $2m$ は最小の通常解なので, エイリアン解は通常解より常に小さい. したがって, エイリアン解は求めやすい. これを定理しておく.

定理 1 陪関数の場合, エイリアン解は通常解より小さい.

陪関数の場合は礼儀正しく振る舞うエイリアンしかないと言って良い,

しかしオイラー関数に対応した場合のエイリアンは不作法でしばしば凶暴に振る舞う. これは次号でふれる.

7　陪関数の余関数の評価式

自然数 $a > 1$ にたいし $1 \leq a - 2\widetilde{\varphi}(a)$ が成り立つ．a が素数となる必要十分条件は $a - 2\widetilde{\varphi}(a) = 1$.

上の結果は $a - 2\widetilde{\varphi}(a)$ が優良な性質を持つことを意味する．そこで, 最初の発見者の特権によって, これを**陪関数の余関数**とよび, 記号で $\mathrm{co}\widetilde{\varphi}(a)$ と書くことにする．

すると, $a \geq 2$ なら $co\widetilde{\varphi}(a) \geq 1$ が成り立ち, $co\widetilde{\varphi}(a) = 1$ になる条件は a が素数になることである．

a が素数でないなら余関数の値 $co\widetilde{\varphi}(a)$ は $\sqrt{a}$ で下から評価できる．これを以下で示す．

オイラー関数については a が素数でないならその余関数 $co\varphi(a) = a - \varphi(a) \geq \sqrt{a}$ が示されていた．これを使うと

$$\widetilde{\varphi}(a) = \frac{\varphi(a)}{2^s} \leq \frac{\varphi(a)}{2}$$

によって　$2\widetilde{\varphi}(a) \geq \varphi(a)$ したがって

$$\sqrt{a} \leq co\varphi(a) \leq co\widetilde{\varphi}(a).$$

a が素数でなくさらに素数の平方でもないときより良い評価式を与えよう．

7.1　余関数の数表

余関数の値を因数分解してできた素因数がみな L と互いに素ならエイリアンの卵になる．この場合を $(*)$ で示した．

数表でチェックすると L と q が互いに素でない場合が多いことがわかる．この場合を $(-)$ で示した．

7.2　余関数の決定問題

例題

$co\widetilde{\varphi}(a) = 11$ を満たす a を求める．

解答.

$s = 1$ のとき．$a = p^e$ なら $co\widetilde{\varphi}(a) = p^{e-1} = 11$ によって $e = 2, p = 11$.

$s \geq 2$ のとき．

$$\widetilde{\varphi}(a) \leq \frac{\widetilde{\varphi}(a)}{4} < \frac{a-1}{4}.$$

よって $4\widetilde{\varphi}(a) < a - 1$. $2\widetilde{\varphi}(a) = a - 11$ を思い出すと $2a - 22 < a - 1$ になるので $a \leq 21$.

一方 $a - 11 = 2\widetilde{\varphi}(a) \geq 1$. ゆえに, $a \geq 12$.

かくして,$12 \leq a \leq 21$. 候補 は $a = 12, 14, 15, 18, 20, 21$. だけであり, そこから逐次チェックして $a = 14, 15$ がわかる．

表 8: 非素数 a についての $co\widetilde{\varphi}(a)$

a	$*$	素因数分解	s	$\widetilde{\varphi}(a)$	$co\widetilde{\varphi}(a)$	素因数分解
4	−	$[2^2]$	1	1	2	$[2]$
9	−	$[3^2]$	1	3	3	$[3]$
8	−	$[2^3]$	1	2	4	$[2^2]$
25	−	$[5^2]$	1	10	5	$[5]$
6	$*$	$[2,3]$	2	0.5	5	$[5]$
49	−	$[7^2]$	1	21	7	$[7]$
16	−	$[2^4]$	1	4	8	$[2^3]$
10	−	$[2,5]$	2	1	8	$[2^3]$
27	−	$[3^3]$	1	9	9	$[3^2]$
12	−	$[2^2,3]$	2	1	10	$[2,5]$
121	−	$[11^2]$	1	55	11	$[11]$
14	$*$	$[2,7]$	2	1.5	11	$[11]$
15	$*$	$[3,5]$	2	2	11	$[11]$
169	−	$[13^2]$	1	78	13	$[13]$
18	−	$[2,3^2]$	2	1.5	15	$[3,5]$
21	−	$[3,7]$	2	3	15	$[3,5]$
32	−	$[2^5]$	1	8	16	$[2^4]$
20	−	$[2^2,5]$	2	2	16	$[2^4]$
289	−	$[17^2]$	1	136	17	$[17]$
22	$*$	$[2,11]$	2	2.5	17	$[17]$
361	−	$[19^2]$	1	171	19	$[19]$
24	−	$[2^3,3]$	2	2	20	$[2^2,5]$

8 余関数の 2 次評価

a が素数でないとき $\widetilde{\varphi}(a) \geq \sqrt{a}$.
ここで等号が成り立つときは a が素数の平方の場合である.
これを, オイラー関数の余関数 $a - \varphi(a)$ についての 2 次評価式を使用せずに証明する.
$s = s(a) \geq 2$ のとき $4\widetilde{\varphi}(a) \leq a - 1$.
目的の不等式を背理法で示すため $a - 2\widetilde{\varphi}(a) < \sqrt{a}$ を仮定する.
これを 2 倍して $4\widetilde{\varphi}(a) \leq a - 1$ の両辺を加えれば $2a < 2\sqrt{a} + a - 1$. よって

$$a - 2\sqrt{a} + 1 < 0.$$

$x = \sqrt{a}$ とおけば $x^2 - 2x + 1 < 0$ になるので $x = \sqrt{a} < 1$. これは矛盾. よって不等式は正しいことが示された.

$s = s(a) = 1$ のとき $a = p^e$ とおけば $co\widetilde{\varphi}(p^e) = p^{e-1} = a^{\frac{e-1}{e}}$ なので $a^{\frac{e-1}{e}} - a^{\frac{1}{2}} > 0$ を確認すれば良い.
$e \geq 2$ によれば $\frac{e-1}{e} \geq \frac{1}{2}$ が成り立つのでこれより明らか.

オイラー関数の場合では帰納法で不等式を証明するという労苦を伴う証明であった．しかし, これまでの議論で確認したように陪関数のときは簡単に証明できる．これも陪関数の持つ優良な性質と言ってよい.

9　2 次評価の精密化

陪関数の場合,2 次評価の数表を計算機で作ってみた.

表 9: 陪関数の 2 次評価の数表

a	素因数分解	s	$\widetilde{\varphi}(a)$	$co\widetilde{\varphi}(a)$	$co\widetilde{\varphi}(a)-\sqrt{a}$
8	$[2^3]$	1	2	4	1.171572875
6	$[2,3]$	2	0.5	5	2.550510257
27	$[3^3]$	1	9	9	3.803847577
16	$[2^4]$	1	4	8	4
10	$[2,5]$	2	1	8	4.83772234
12	$[2^2,3]$	2	1	10	6.535898385
15	$[3,5]$	2	2	11	7.127016654
14	$[2,7]$	2	1.5	11	7.258342613
32	$[2^5]$	1	8	16	10.34314575
21	$[3,7]$	2	3	15	10.41742431
18	$[2,3^2]$	2	1.5	15	10.75735931
20	$[2^2,5]$	2	2	16	11.52786405

この表によると a は素数でも素数の平方でもなく,$a \neq 8,6,27,16$ のとき

$$co\widetilde{\varphi}(a) > 4+\sqrt{a}$$

が成り立つ．という結果がでる.

$co\widetilde{\varphi}(a) < 20$ を満たす a をすべて求めるには a は素数でも素数の平方でもなく,$a \neq 8,6,27,16$ のとき $20 > co\widetilde{\varphi}(a) > 4+\sqrt{a}$ により $a < 16^2 = 296$ と評価できる．これはかなり荒い評価である.

10　余関数の 3 次評価

a が素数でなくさらに素数の平方でもないとき, より良い評価式を与えよう.

10.1　素数の立方

a は素数 p の立方 p^3 としよう.

$a=p^3$ のとき $2\widetilde{\varphi}(a) = 2\widetilde{\varphi}(p^3) = (p-1)p^2 = a - a^{\frac{2}{3}}$ が成り立つ.

一般に次の定理が成り立つことを示そう.

表 10: オイラー関数の 2 次評価

a	素因数分解	s	$\varphi(a)$	$co\varphi(a)$	$co\varphi(a)-\sqrt{a}$
8	$[2^3]$	1	4	4	1.171572875
6	$[2,3]$	2	2	4	1.550510257
10	$[2,5]$	2	4	6	2.83772234
15	$[3,5]$	2	8	7	3.127016654
27	$[3^3]$	1	18	9	3.803847577
16	$[2^4]$	1	8	8	4
14	$[2,7]$	2	6	8	4.258342613
21	$[3,7]$	2	12	9	4.417424305
12	$[2^2,3]$	2	4	8	4.535898385
20	$[2^2,5]$	2	8	12	7.527864045
18	$[2,3^2]$	2	6	12	7.757359313
32	$[2^5]$	1	16	16	10.34314575

定理 2 a が素数でなくさらに素数の平方でもないとき

$$2\widetilde{\varphi}(a) \leq a - a^{\frac{2}{3}}$$

が成り立つ.

評価式は次のように言い換えてもよい.

$$co\widetilde{\varphi}(a) = a - 2\widetilde{\varphi}(a) \geq a^{\frac{2}{3}}.$$

証明. 目的の不等式を背理法で示すため $a - 2\widetilde{\varphi}(a) < a^{\frac{2}{3}}$ を仮定する.
これを 2 倍して

$$2a - 4\widetilde{\varphi}(a) < 2a^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

ところで, 一般に $s = s(a) \geq 2$ のとき

$$\widetilde{\varphi}(a) \leq \frac{\varphi(a)}{2^s} \leq \frac{\varphi(a)}{4} \leq \frac{a-1}{4}.$$

よって,

$$4\widetilde{\varphi}(a) \leq a - 1.$$

これを式 **??** の両辺に加えれば $2a < 2a^{\frac{2}{3}} + a - 1$. よって

$$a - 2a^{\frac{2}{3}} + 1 < 0.$$

$x = a^{\frac{1}{3}}$ とおけば $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$.
したがって, $x < 2$ により $a \leq 7$. a が素数でなくさらに素数の平方でもないので $a = 6$.
直接計算して

$$co\widetilde{\varphi}(6) = 6 - 1 = 5 > 6^{\frac{2}{3}} = 3.30192.$$

よって不等式は正しい.

$s = s(a) = 1$ のとき $a = p^e$ とおけば

$co\widetilde{\varphi}(p^e) = p^{e-1} = a^{\frac{e-1}{e}}$ なので $a^{\frac{e-1}{e}} - a^{\frac{2}{3}} > 0$ を確認するには指数部の比較で良い．実際 $e \geq 3$ により

$$\frac{e-1}{e} - \frac{2e}{3} = \frac{e-3}{3} \geq 0.$$

これで証明が完了した．

オイラー関数の場合に比べて陪関数の場合は値の評価をしやすく 3 次評価式の証明がきれいにできた．

10.2　3 次評価の数値データ

表 11: 陪関数の場合の 3 次評価

a	素因数分解	s	$\widetilde{\varphi}(a)$	$co\widetilde{\varphi}(a)$	$co\widetilde{\varphi}(a) - a^{\frac{2}{3}}$
25	$[5^2]$	1	10	5	-3.549879733
9	$[3^2]$	1	3	3	-1.326748711
4	$[2^2]$	1	1	2	-0.5198421
8	$[2^3]$	1	2	4	0
27	$[3^3]$	1	9	9	0
125	$[5^3]$	1	50	25	0
343	$[7^3]$	1	147	49	0
16	$[2^4]$	1	4	8	1.650395792
6	$[2, 3]$	2	0.5	5	1.698072751
10	$[2, 5]$	2	1	8	3.358411166
12	$[2^2, 3]$	2	1	10	4.758517212
15	$[3, 5]$	2	2	11	4.917798004
14	$[2, 7]$	2	1.5	11	5.191214266
32	$[2^5]$	1	8	16	5.920631601
21	$[3, 7]$	2	3	15	7.388337389
18	$[2, 3^2]$	2	1.5	15	8.131714545
81	$[3^4]$	1	27	27	8.279245593
20	$[2^2, 5]$	2	2	16	8.631937003
22	$[2, 11]$	2	2.5	17	9.148575589

上にあげた数値計算の結果では素数は除き素数の平方は入れた．素数の平方のときだけ負になっている．さらに素数の立方の場合には 0 になっていることに注意したい．

オイラー関数の場合 3 次評価式は条件を付け加えて, そのうえ新たな不等式の証明から始める必要がある．これは次回でふれる．