数学の研究を始めよう (14)
エイリアンが暴れ馬になるとき

飯高 茂

平成 26 年 1 月 9 日

1　第 2 種オイラー関数と陪関数

第 2 種オイラー関数と陪関数の定義は以前にも書いたが, 重要なのであらためて書く.

自然数 a の素因数分解 $a = {p_1}^{e_1} \cdots {p_s}^{e_s}$ に応じて $\frac{\varphi(a)}{2^s}$ を $\widetilde{\varphi}(a)$ と書き**オイラー陪関数** と呼ぶ. さらに $\varphi_1(a) = \widetilde{\varphi}(a)a$ とおき. $\varphi_1(a)$ を第 2 種オイラー関数という.

その心は $a = p^e$ のとき,a より小さいが p と互いに素な数の和は

$$\frac{p^e(p^e+1)}{2} - p \times \frac{p^{e-1}(p^{e-1}+1)}{2} = \frac{p^e(p^e - p^{e-1})}{2}.$$

なので $\frac{p^e\varphi(p^e)}{2}$ となり定義から $\varphi_1(p^e)$ と等しいからである.

2　第 2 種オイラー関数のグラフ

とありあえず第 2 種オイラー関数 $\varphi_1(a)$ のグラフを描いてみよう.

$x = a, y = b = \varphi_1(a)$ とおき $a < 2000$ についてグラフを描いたのである.

a が素数 p なら $s = 1$, $\widetilde{\varphi}(p) = \frac{p-1}{2}$ なので $2\widetilde{\varphi}(p) = p - 1 = a - 1, b = \varphi_1(a) = \frac{a(a-1)}{2}$ によって

$$y = \varphi_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

を満たす. したがって素数 p に対応して点 $(p, \varphi_1(p))$ は放物線 $2y = x(x-1)$ の上にあり一般の自然数 a に対しての 点 $(a, \varphi_1(a))$ は

$$y \leq \frac{x(x-1)}{2}, y \geq 1$$

で定義された領域の点である.

2.1　$a = 2^e p$ の定める放物線

p を奇素数として $e > 0$ に対して $a = 2^e p$ とすると $\varphi(a) = 2^{e-1}(p-1)$, $\varphi_1(a) = a\frac{\varphi(a)}{4} = a\frac{2^e(p-1)}{8} = \frac{a}{8}(a - 2^e)$.

$x = a, y = \varphi_1(a)$ とおけば $8y = x(x - 2^e)$.

たとえば $e = 1$ なら 放物線 $8y = x(x-2)$.

$e = 2$ なら 放物線 $8y = x(x-4)$.

$e = 3$ なら 放物線 $8y = x(x-8)$.

がそれぞれ対応する.

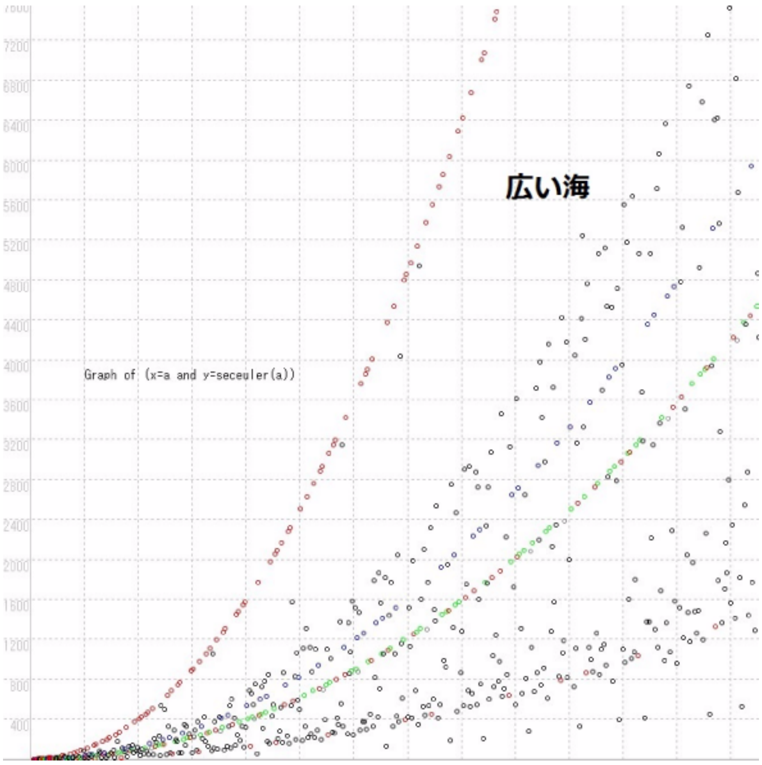

図 1: 第 2 種オイラ関数のグラフ

2.2 $a = 3^e p$ の定める放物線

同様に $p \neq 3$ を素数とし,$x = a = 3^e p$, $y = \varphi_1(a)$ とおけば $6y = x(x - 3^e)$ を満たす.
$e = 1$ なら 放物線 $6y = x(x-3)$.
$e = 2$ なら 放物線 $6y = x(x-9)$.
$e = 3$ なら 放物線 $6y = x(x-27)$.
がそれぞれ対応する.

2.3 $a = qp$ の定める代数曲線

素数 q を 1 つ定めて素数 $p \neq q$ について $a = qp$ について

$$\varphi_1(a) = a\frac{(q-1)(p-1)}{4} = a(p-1)\frac{q-1}{4} = a(\frac{a}{q} - 1)\frac{q-1}{4} = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{q})a(a-q)$$

かくして $x = a, y = \varphi_1(a)$ とおけば放物線 $y = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{q})x(x-q)$ が定まる.

2.4 $a = p^e$ の定める代数曲線

素数の累乗 p^e と書ける a について $\varphi(a) = p^{e-1}\overline{p}$. ここで $(\overline{p} = p - 1)$ なので $\varphi_1(a) = \frac{ap^{e-1}\overline{p}}{2}$ となる.
$x = a, y = \varphi_1(a)$ とおくと,$2y = x(x - x^{\frac{e-1}{e}})$ を満たす.

$e = 2$ のとき $2y = x(x - x^{\frac{1}{2}})$ であり $(2y - x^2)^2 = x^3$ を満たすのでこれは 4 次代数曲線である.

2.5 $s \geq 2$ のとき

$s \geq 2$ ならば

$$\varphi_1(a) = a\frac{\varphi(a)}{2^s} \leq a\frac{\varphi(a)}{4} \leq a\frac{a-1}{4}$$

かくして $x = a, y = \varphi_1(a)$ とおけば放物線 $4y \leq x(x-1)$ を境界とする領域ができる.
この補集合の定める領域 $4y > x(x-1), 2y \leq x(x-1)$ がグラフで描かれた「広い海」である.

3　オイラー関数の余関数のグラフ

4　余関数のグラフ

陪関数の余関数のグラフは次の通りである．広い海がますます広く見える．

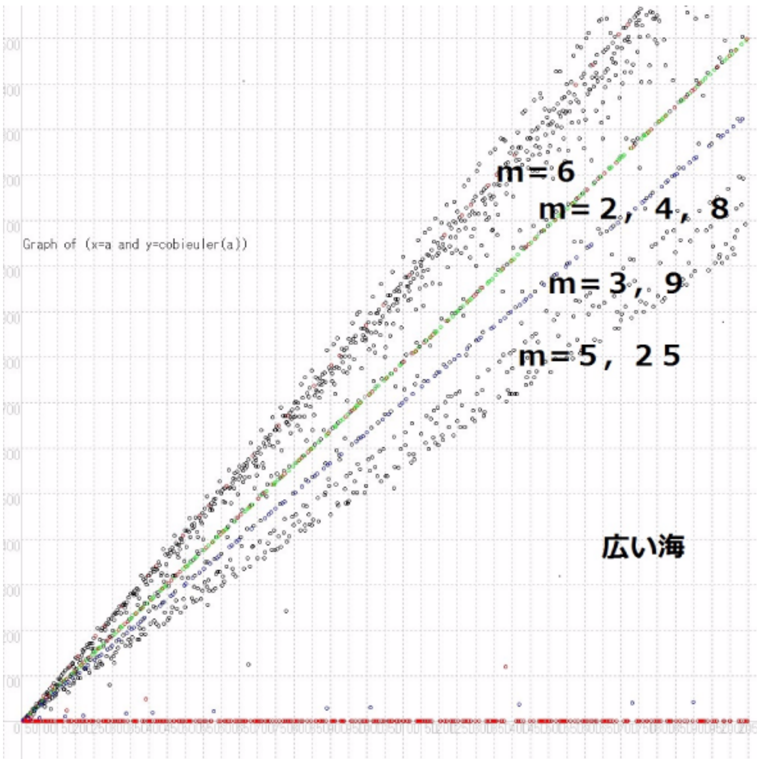

図 2: 陪関数の余関数のグラフ

5　オイラー関数の余関数の 3 次評価式

a が素数 p の立方 p^3 のとき $2\tilde{\varphi}(a) = 2\tilde{\varphi}(p^3) = (p-1)p^2 = a - a^{2/3}$ が成り立つ．一般に a が素数でなくさらに素数の平方でもないとき

$$co\varphi(a) = a - \varphi(a) \geq a^{2/3}$$

は成り立たない．$s = 2, a < 1000$ についての数表を次に見てみよう．

しかし $s \geq 3, a < 1000$ についての次の数表に注目するとこの場合不等式 $a - \varphi(a) \geq a^{2/3}$ 正しいようだ．そこで証明を考えよう．

表 1: $s = 2$ の場合

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$a - \varphi(a) - a^{\frac{2}{3}}$
989	[23,43]	924	-34.26531561
899	[29,31]	840	-34.14791277
943	[23,41]	880	-33.16295385
851	[23,37]	792	-30.80207534
893	[19,47]	828	-27.73299916

表 2: $s = 3$ の場合

a	素因数分解	$\varphi(a)$	$a - \varphi(a) - a^{\frac{2}{3}}$
30	[2,3,5]	8	12.34510615
42	[2,3,7]	12	17.91723876
60	$[2^2, 3, 5]$	16	28.67381135
70	[2,5,7]	24	29.01500748
66	[2,3,11]	20	29.6683791
105	[3,5,7]	48	34.74336351
78	[2,3,13]	24	35.74438779
84	$[2^2, 3, 7]$	24	40.8198121
90	$[2, 3^2, 5]$	24	45.9170115
110	[2,5,11]	40	47.04229575
102	[2,3,17]	32	48.16934425
114	[2,3,19]	36	54.489065
165	[3,5,11]	80	54.91689708
130	[2,5,13]	48	56.33770056
120	$[2^3, 3, 5]$	32	63.67119202
126	$[2, 3^2, 7]$	36	64.86684382
140	$[2^2, 5, 7]$	48	65.038005
154	[2,7,11]	60	65.26923782

5.1　3 次基本不等式

$s \geq 3$ のとき $a > 1$ について $a - \varphi(a) - a^{\frac{2}{3}} \geq 0$　を証明することを目標にする.
はじめは a に平方因子がないときを扱う.
相異なる素数 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ について $a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$ のとき $\varphi(a) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdots (p_s - 1)$ なので

$$a - \varphi(a) - a^{2/3} = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s - (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdots (p_s - 1) - (p_1 \cdot p_2 \cdots p_s)^{2/3}$$

となる. $p_1, p_2, \cdots, p_s$ について各々の正の 3 乗根を $x_1, x_2, \cdots, x_s$ とおけば

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_s{}^3 - 1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 > 0$$

と書き直せる.

簡単のため $s = 3$ とし x_1, x_2, x_3 をそれぞれ x, y, z とおけば $x > y > z, z^3 \geq 2$ と仮定できる. その結果目的の不等式は

$$x^3y^3z^3 - (x^3-1)(y^3-1)(z^3-1) - x^2y^2z^2 > 0$$

と見やすい形になった. これは, 各変数については 3 次式であるが, 今まで見たことも聞いたこともないような不等式である.

こういうニューフェースに出会えるのが研究の醍醐味と言ってよい.

z に着目して $F(z) = x^3y^3z^3 - (x^3-1)(y^3-1)(z^3-1) - x^2y^2z^2$ とおく.

$F(z) = (x^3+y^3-1)z^3 - x^2y^2z^2 + (x^3-1)(y^3-1)$ となるので

$A = x^3+y^3-1, B = x^2y^2, C = (x^3-1)(y^3-1)$ とすると $F(z) = Az^3 - Bz^2 + C$ と簡単に書ける.

z で微分すると

$$F'(z) = 3Az^2 - 2Bz.$$

この 0 でない方の根を z_0 とおけば $3Az_0 = 2B$ となり

$$F(z_0) = Az_0{}^3 - Bz_0{}^2 + C = (Az_0 - B)z_0{}^2 + C = -\frac{z_0{}^2B}{3} + C = \frac{27A^2C - 4B^3}{27A^2}.$$

$u = x^3, v = y^3$ とおけば $v \geq 3, u \geq 5$. $A^2C = (u-1)(v-1)(u+v-1)^2, B^3 = (uv)^2$ なので

$$G(u,v) = 27A^2C - 4B^3 = 27(u-1)(v-1)(u+v-1)^2 - 4(uv)^2$$

とおき, これが正となることを示そう.

相加相乗平均の不等式によって $u+v-1 \geq 2\sqrt{uv} - 1$ なので $W = \sqrt{uv}$ とおけば

$$(u+v-1)^2 \geq (2\sqrt{uv}-1)^2 = 4W^2 - 4W + 1$$

一方 $u \geq 5$ により $1 \leq \frac{u}{5} = u - \frac{4u}{5}$ によって $\frac{4u}{5} \leq u - 1$.

同様にして $v \geq 3$ により $\frac{2v}{3} \leq v - 1$.

$$A^2C = (u-1)(v-1)(u+v-1)^2 \geq \frac{4u}{5}\frac{2v}{3}(2\sqrt{uv}-1)^2 = \frac{8}{15}W^2(4W^2 - 4W + 1).$$

これより

$$G(u,v) \geq 27\frac{8}{15}W^2(4W^2 - 4W + 1) - 4W^4 = (\frac{216}{15}(4W^2 - 4W + 1) - 4W^2)W^2.$$

ところで $W = \sqrt{uv} > \sqrt{15} > 3$ によって $H(w) = (\frac{216}{15}(4W^2 - 4W + 1) - 4W^2)$ とおけば $H(3) > 0$ であり, 2 次式 $H(w)$ の頂点の x 座標は $\frac{216 \times 2}{216 \times 4 - 60} < 1$ なので $W > 3$ のとき $H(W) > 0$. したがって, $G(u,v) > 0$ は示された.

このように高校数学の範囲で新しい不等式が証明できた.

5.2 一般の場合の不等式

$s > 3$ のときも不等式

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_s{}^3 - 1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 > 0$$

が成り立つ事は帰納法で簡単に分かる．すなわち $s-1 \geq 2$ の場合の不等式の成立を仮定する．

$$X = x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_{s-1}{}^3, Y = (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_{s-1}{}^3 - 1), Z = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_{s-1})^2$$

とおくと, 帰納法の仮定から $X > Y + Z$ が成り立つとしてよい.

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 = Xx_s{}^3, (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_s{}^3 - 1) = Y(x_s{}^3 - 1), (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 = Zx_s{}^2$$

によれば

$$x_1{}^3 \cdot x_2{}^3 \cdots x_s{}^3 - (x_1{}^3 - 1) \cdot (x_2{}^3 - 1) \cdots (x_s{}^3 - 1) - (x_1 \cdot x_2 \cdots x_s)^2 = Xx_s{}^3 - Y(x_s{}^3 - 1) - Zx_s{}^2$$

$$\begin{aligned} Xx_s{}^3 - Y(x_s{}^3 - 1) - Zx_s{}^2 &> (Y + Z)x_s{}^3 - Y(x_s{}^3 - 1) - Zx_s{}^2 \\ &> Z(x_s - 1)x_s{}^2 + Y > 0. \end{aligned}$$

$s \geq 3$ のとき a に平方因子があるときを最後に扱う.

$a = p_1{}^{e_1} \cdots p_s{}^{e_s}$ に応じて $P_1 = p_1{}^{e_1}, \cdots, P_s = p_s{}^{e_s}$ とおくとき $a = P_1 \cdots P_s$ となるので $\varphi(a) \leq (P_1 - 1) \cdots (P_s - 1)$ になって

$$a - \varphi(a) - a^{\frac{2}{3}} \geq a - (P_1 - 1) \cdots (P_s - 1) - a^{\frac{2}{3}} \geq 0$$

となり証明された.

このようにしてオイラー関数の余関数について 3 次評価式ができたが $s \geq 3$ が新たな条件となっている.

6 オイラー関数の場合のエイリアン解

q_1, q_2 を相異なる素因数とし,$Q = q_1 q_2, \overline{q_1} = q_1 - 1, \overline{q_2} = q_2 - 1, \overline{Q} = \overline{q_1 q_2}$ とおく．さらに $m = q_1{}^{\varepsilon_1} q_2{}^{\varepsilon_2}$ とし q_1, q_2 と異なる素因数 p に対して $a = mp$ とおく．このとき q_1, q_2 をジーンと呼ぶ.

$$\varphi(a) = \varphi(m)\varphi(p) = \varphi(m)(p - 1)$$

を m 倍して変形し

$$m\varphi(a) = \varphi(m)(mp - m) = \varphi(m)a - m\varphi(m). \tag{1}$$

すると $\varphi(m)=\frac{m\overline{Q}}{Q}$ になるので

$$\frac{\varphi(m)}{m}=\frac{\overline{Q}}{Q}.$$

解 a を素因数分解して $a={q_1}^{e_1}{q_2}^{e_2}L,(L$ は q_1,q_2 で割れない) とし $M={q_1}^{e_1}{q_2}^{e_2}$ とおくと $e_1>0,e_2>0$ が示され $a=ML$ となり $\varphi(a)=\frac{\overline{Q}M\varphi(L)}{Q}$. 式 (1) を m で割ると

$$\frac{\overline{Q}}{Q}(M\varphi(L))=\frac{\overline{Q}}{Q}(ML-m).$$

これより $\frac{m}{M}={q_1}^{\eta_1}{q_2}^{\eta_2}$ とおくと次式が得られる.

$$L-\varphi(L)={q_1}^{\eta_1}{q_2}^{\eta_2}.$$

ここで $\eta_1=\varepsilon_1-e_1,\eta_2=\varepsilon_2-e_2$. これがオイラー関数のときの 2 個のジーン q_1,q_2 に対応する卵の方程式である. 証明からわかるように,2 個以上のジーン $q_1,q_2,\cdots$ にも同様の卵の方程式が成立する.

$L-\varphi(L)$ は余関数 $\mathrm{co}\varphi(L)$ であることに注意するとよい.

6.1 エイリアンの卵の名前

パソコン君に依頼してジーンが 3 と 5 のときの卵 L が 10000 以下の場合に求めた. 単独の場合のジーンも意外に多かったので, 各卵にアルファベットで名前をつけた.

表 3: ジーン 3 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 10,000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	素因数分解	
	n=115	$[5, 23]$	88	27	$[3^3]$
B	n=187	$[11, 17]$	160	27	$[3^3]$
C	n=781	$[11, 71]$	700	81	$[3^4]$
D	n=1195	$[5, 239]$	952	243	$[3^5]$
E	n=1357	$[23, 59]$	1276	81	$[3^4]$
F	n=1537	$[29, 53]$	1456	81	$[3^4]$
G	n=2563	$[11, 233]$	2320	243	$[3^5]$
H	n=3859	$[17, 227]$	3616	243	$[3^5]$
I	n=7909	$[11, 719]$	7180	729	$[3^6]$
J	n=9259	$[47, 197]$	9016	243	$[3^5]$

表 4: ジーン 5 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 10,000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	素因数分解	
A	69	$[3,23]$	44	25	$[5^2]$
B	133	$[7,19]$	108	25	$[5^2]$
C	1469	$[13,113]$	1344	125	$[5^3]$
D	1853	$[17,109]$	1728	125	$[5^3]$
E	2033	$[19,107]$	1908	125	$[5^3]$
F	2369	$[23,103]$	2244	125	$[5^3]$
G	2737	$[7,17,23]$	2112	625	$[5^4]$
H	2813	$[29,97]$	2688	125	$[5^3]$
I	3293	$[37,89]$	3168	125	$[5^3]$
J	3569	$[43,83]$	3444	125	$[5^3]$
K	3713	$[47,79]$	3588	125	$[5^3]$
L	3869	$[53,73]$	3744	125	$[5^3]$
M	3953	$[59,67]$	3828	125	$[5^3]$
N	4333	$[7,619]$	3708	625	$[5^4]$
O	7969	$[13,613]$	7344	625	$[5^4]$

6.2 エイリアンの例

6.2.1 $m = 3^6$ のとき

$m = 3^6$ のときの解を求めた.

6.2.2 $m = 5^4$ のとき

$m = 5^4$ のときの解を求めた.

6.2.3 $m = 5^3 \times 3^2$ のとき

この後は通常解が続く.

表 5: ジーン 3,5 のときの卵

卵の名前	卵 $L(< 20,000)$	素因数分解	$\varphi(L)$	素因数分解	
A	493	$[17,29]$	448	45	$[3^2,5]$
B	1003	$[17,59]$	928	75	$[3,5^2]$
C	1219	$[23,53]$	1144	75	$[3,5^2]$
D	1363	$[29,47]$	1288	75	$[3,5^2]$
E	2599	$[23,113]$	2464	135	$[3^3,5]$
F	3103	$[29,107]$	2968	135	$[3^3,5]$
G	4183	$[47,89]$	4048	135	$[3^3,5]$
H	4399	$[53,83]$	4264	135	$[3^3,5]$
I	5713	$[29,197]$	5488	225	$[3^2,5^2]$
J	6103	$[17,359]$	5728	375	$[3,5^3]$
K	6613	$[17,389]$	6208	405	$[3^4,5]$
L	8119	$[23,353]$	7744	375	$[3,5^3]$
M	8413	$[47,179]$	8188	225	$[3^2,5^2]$
N	8809	$[23,383]$	8404	405	$[3^4,5]$
O	9169	$[53,173]$	8944	225	$[3^2,5^2]$
P	9853	$[59,167]$	9628	225	$[3^2,5^2]$
Q	10063	$[29,347]$	9688	375	$[3,5^3]$
R	11203	$[17,659]$	10528	675	$[3^3,5^2]$
S	12193	$[89,137]$	11968	225	$[3^2,5^2]$
T	15019	$[23,653]$	14344	675	$[3^3,5^2]$
U	16873	$[47,359]$	16468	405	$[3^4,5]$
V	18703	$[59,317]$	18328	375	$[3,5^3]$
W	18709	$[53,353]$	18304	405	$[3^4,5]$
X	18763	$[29,647]$	18088	675	$[3^3,5^2]$

6.2.4 m=$5^3 \times 3^3$

$m = 5^3 \times 3^3$ のときの解を求めた. ジーンが 3 の指数を 1 つ上げただけでエイリアン解がぐっと増えた. 対応する卵の名前を書いていったら, 最後の 1 つの卵の名前が不明になった. すべての卵を拾うには探索の範囲をさらに広げる必要があったのだ. 卵がわからないエイリアン解は言ってみれば、暴れ馬である. しかも, この場合は探索の範囲を広げればさらにエイリアン解がみつかる可能性が大である.

$m = 5^3 \times 3^3$ のときのエイリアン解はその卵 L のジーンが 3,5 でその指数が 2 以下である. すなわち $L = 5^{\eta_1} \times 3^{\eta_2}, (\eta_1 \leq 2, \eta_2 \leq 2)$

私は最初の段階で $L < 10000$ で卵を探したのでエイリアン解 182895 の卵が見つからなかった. そこで, 何という暴れ馬だ, と嘆じたのだが気を取り直すと卵 S が見つかったのである.

$m = 5^3 \times 3^3$ のときのエイリアン解の最大値は 182895 であることは確実だが証明はできていない.

エイリアン解探索のときの範囲を十分安全にとるにはオイラー関数の余関数の 3 次評価の精密

表 6: $m = 3^6$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
1458	$[2, 3^6]$	486	
3105 $*$	$[3^3, 5, 23]$	1584	$q = 3$ A
3585$*$	$[3, 5, 239]$	1904	$q = 3$ D
3645	$[3^6, 5]$	1944	
5049$*$	$[3^3, 11, 17]$	2880	$q = 3$ B
5103	$[3^6, 7]$	2916	
7029 $*$	$[3^2, 11, 71]$	4200	$q = 3$ C
7689 $*$	$[3, 11, 233]$	4640	$q = 3$ G
8019	$[3^6, 11]$	4860	
9477	$[3^6, 13]$	5832	

化が必要なのであろう.

表 7: $m = 5^4$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
1250	$[2, 5^4]$	500	
1725 $*$	$[3, 5^2, 23]$	880	$q = 5$ A
1875	$[3, 5^4]$	1000	
3325 $*$	$[5^2, 7, 19]$	2160 $q = 5$ B	
4375	$[5^4, 7]$	3000	
6875	$[5^4, 11]$	5000	
7345	$*$ $[5, 13, 113]$	5376	$q = 5$ C
8125	$[5^4, 13]$	6000	
9265 $*$	$[5, 17, 109]$	6912	$q = 5$ D
10165$*$	$[5, 19, 107]$	7632	$q = 5$ E
10625	$[5^4, 17]$	8000	
11845$*$	$[5, 23, 103]$	8976	$q = 5$ F
11875	$[5^4, 19]$	9000	
14065$*$	$[5, 29, 97]$	10752	$q = 5$ G
14375	$[5^4, 23]$	11000	
16465$*$	$[5, 37, 89]$	12672	$q = 5$ I
17845$*$	$[5, 43, 83]$	13776	$q = 5$ J
18125	$[5^4, 29]$	14000	
18565$*$	$[5, 47, 79]$	14352	$q = 5$ K
19345$*$	$[5, 53, 73]$	14976	$q = 5$ L
19375	$[5^4, 31]$	15000	
19765$*$	$[5, 59, 67]$	15312	$q = 5$ M
23125	$[5^4, 37]$	18000	
25625	$[5^4, 41]$	20000	
26875	$[5^4, 43]$	21000	
29375	$[5^4, 47]$	23000	

表 8: $m = 5^3 \times 3^2$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
2250	$[2, 3^2, 5^3]$	600	
5985 $*$	$[3^2, 5, 7, 19]$	2592	$q = 3$ の B
7875	$[3^2, 5^3, 7]$	3600	
12375	$[3^2, 5^3, 11]$	6000	
14625	$[3^2, 5^3, 13]$	7200	
15045$*$	$[3, 5, 17, 59]$	7424	B
18285 $*$	$[3, 5, 23, 53]$	9152	C
19125	$[3^2, 5^3, 17]$	9600	
20445	$[3, 5, 29, 47]$	10304	
21375	$[3^2, 5^3, 19]$	10800	
25875	$[3^2, 5^3, 23]$	13200	

表 9: $m = 5^3 \times 3^3$ のときの解

a	素因数分解	$\varphi(a)$	卵の名前
6750	$[2, 3^3, 5^3]$	1800	
17955 $*$	$[3^3, 5, 7, 19]$	7776	$q = 3$ の B
23625	$[3^3, 5^3, 7]$	10800	
36975 $*$	$[3, 5^2, 17, 29]$	17920	A
37125	$[3^3, 5^3, 11]$	18000	
43875	$[3^3, 5^3, 13]$	21600	
45135 $*$	$[3^2, 5, 17, 59]$	22272	B
54855 $*$	$[3^2, 5, 23, 53]$	27456	C
57375	$[3^3, 5^3, 17]$	28800	
61335 $*$	$[3^2, 5, 29, 47]$	30912	D
64125	$[3^3, 5^3, 19]$	32400	
77625	$[3^3, 5^3, 23]$	39600	
85695 $*$	$[3, 5, 29, 197]$	43904	I
97875	$[3^3, 5^3, 29]$	50400	
104625	$[3^3, 5^3, 31]$	54000	
124875	$[3^3, 5^3, 37]$	64800	
126195 $*$	$[3, 5, 47, 179]$	65504	M
137535 $*$	$[3, 5, 53, 173]$	71552	O
138375	$[3^3, 5^3, 41]$	72000	
145125	$[3^3, 5^3, 43]$	75600	
147795 $*$	$[3, 5, 59, 167]$	77024	P
158625	$[3^3, 5^3, 47]$	82800	
178875	$[3^3, 5^3, 53]$	93600	
182895 $*$	$[3, 5, 89, 137]$	95744	暴れ馬
199125	$[3^3, 5^3, 59]$	104400	
205875	$[3^3, 5^3, 61]$	108000	
226125	$[3^3, 5^3, 67]$	118800	
239625	$[3^3, 5^3, 71]$	126000	