奇数だけ平行移動した完全数 前編
そこには珍獣のような数があった.

飯高 茂

2017 年 10 月 10 日

1　完全数の水平展開

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した狭義の完全数という. q が奇数素数になる条件によって, m : 偶数になる. $a = 2^e q$ は方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ を満たすことを示そう.

Proof. $N = 2^{e+1} - 1$ とおくと $\sigma(2^e) = N$, $q = N + m$. さて $Nq = 2a - q$ に注意し $a = 2^e q$ について計算する.

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\ &= Nq + N \\ &= 2a - q + N \\ &= 2a - m.\end{aligned}$$

方程式 $\sigma(a) = 2a - m$ の解を m だけ平行移動した広義の完全数という.

狭義の完全数のとき m : 偶数になる. しかし 奇数 m の場合を含めて広義の完全数を研究する.

m : 偶数のときに, 広義の完全数は馴染み深いものもあるが奇数の場合の広義の完全数はほとんどだれにも知られていない. しかし数は少ないが形が特色ある広義の完全数が出てきた. 場合によっては珍獣のような数がみつかることもある.

1.1 $m = 1$ の場合

最初に簡単な場合を考える.

$m = 1$ の場合, $a \leq 1000000$ についてパソコンで調べた結果は次の通りである.

表 1: $[P = 2, m = 1]$ m だけ平行移動した広義の 完全数

a	素因数分解
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7
256	2^8
512	2^9
1024	2^{10}
2048	2^{11}

$m = 1$ のとき方程式は $\sigma(a) = 2a - 1$ になる. この解は $a = 2^e$ に限りそうである. $\sigma(a) = 2a - 1$ の解を 概完全数という. 概完全数は 2^e と書けるか?

この問題は奇数完全数の存在問題に匹敵する難問らしい.

最も簡単な $m = 1$ の場合すら解けていない. まして一般に m:奇数の場合を研究するのはドンキホーテのような役回りを演じることになりそうだ.

2　m : 奇数のとき

$m = 3$ のとき広義の完全数はみつからない．この非常事態でも, $m > 0$: の奇数ときの広義の完全数を $a < 1000000$ の範囲で調べてみた．結果は次の表にある通り．

表 2: $m > 0$: の奇数ときの広義の完全数, $a < 1000000$ の範囲

m	a	素因数分解
5	9	3^2
7	50	$2 * 5^2$
11	244036	$2^2 * 13^2 * 19^2$
19	25	5^2
	2312	$2^3 * 17^2$
25	98	$2 * 7^2$
37	484	$2^2 * 11^2$
41	49	7^2
	81	3^4
47	225	$3^2 * 5^2$
61	2888	$2^3 * 19^2$
71	676	$2^2 * 13^2$
85	242	$2 * 11^2$

以上から推測できること:

注意 1 m : 奇数のとき解は, あったとしてもごく少ないし. とくに解は有限個しかない.

このことをいつの日にか証明したいものだ.

$m = 9, 13, 15, 17$ などでは $a < 1000000$ の範囲では解が見つからない.

m : 奇数の完全数 a : は初めてみる月の裏側のようなもので意外にさびしい世界だった. a : の 2 以外の素因子は指数が 2 , あるいは偶数になる.

$m = 11$ のとき $a = 244036 = 2^2 * 13^2 * 19^2$ に出会った. これは面白いと思った. 3 個の素因数の平方になっている.

指数 2 の並ぶのをみて恐竜 ステゴザウルスの背中についた巨大な板 を私は連想した. レアな広義の完全数がみつけて,(恐竜と呼ぶにはためらいがある) 珍獣と呼ぶことは許されるであろう.

したがって m : 奇数の場合の完全数の調査は珍獣発見の旅と同じ程度に面白いことが期待できる.

$a = (2 * r * q)^2$ のとき $m = 2a - \sigma(a)$ を求めた.

$5 \leq r < q \leq 29$ の場合について, $m = 2a - \sigma(a)$ を計算した.

$r = 13, q = 19$ の場合は $m = 11$ で値が小さくて見やすい. この他の水平移動のパラメータ m は 4 桁以上になっている.

	$[r,q]$	a	factor of a	m
	$[3,5]$	900	$[2^2,3^2,5^2]$	-1021
	$[3,7]$	1764	$[2^2,3^2,7^2]$	-1659
	$[3,11]$	4356	$[2^2,3^2,11^2]$	-3391
	$[3,13]$	6084	$[2^2,3^2,13^2]$	-4485
	$[3,17]$	10404	$[2^2,3^2,17^2]$	-7129
	$[3,19]$	12996	$[2^2,3^2,19^2]$	-8679
c	$[3,23]$	19044	$[2^2,3^2,23^2]$	-12235
	$[5,7]$	4900	$[2^2,5^2,7^2]$	-2569
	$[5,11]$	12100	$[2^2,5^2,11^2]$	-4661
	$[5,13]$	16900	$[2^2,5^2,13^2]$	-5911
	$[5,17]$	28900	$[2^2,5^2,17^2]$	-8819
	$[5,19]$	36100	$[2^2,5^2,19^2]$	-10477
	$[5,23]$	52900	$[2^2,5^2,23^2]$	-14201
	$[7,11]$	23716	$[2^2,7^2,11^2]$	-5635
	$[7,13]$	33124	$[2^2,7^2,13^2]$	-6769
	$[7,17]$	56644	$[2^2,7^2,17^2]$	-9205
	$[7,19]$	70756	$[2^2,7^2,19^2]$	-10507
	$[7,23]$	103684	$[2^2,7^2,23^2]$	-13279
	$[11,13]$	81796	$[2^2,11^2,13^2]$	-6781
	$[11,17]$	139876	$[2^2,11^2,17^2]$	-6065
	$[11,19]$	174724	$[2^2,11^2,19^2]$	-5263
	$[11,23]$	256036	$[2^2,11^2,23^2]$	-2771
	$[13,17]$	195364	$[2^2,13^2,17^2]$	-2539
	$[13,19]$	244036	$[2^2,13^2,19^2]$	11
	$[13,23]$	357604	$[2^2,13^2,23^2]$	6815
	$[17,19]$	417316	$[2^2,17^2,19^2]$	15863
	$[17,23]$	611524	$[2^2,17^2,23^2]$	34651
	$[19,23]$	763876	$[2^2,19^2,23^2]$	52901

$m = 11$ のときが目立つ. 私は白亜紀で行われたステゴザウルスのレースが見えるような気がする. 各恐竜は m のゼッケンを背中につけている. 11 というゼッケンのステゴザウルスは飛び抜けている.

3 広義完全数の解の種類

m : 偶数の場合の完全数について復習しておく.

m が偶数の場合は $\sigma(a) = 2a - m$ の解である広義の完全数いろいろあり, 解の形で名前がついている.

1. 解の形が $a = 2^e q, (q:$ 素数$)$ となるとき正規解という. 一般に A 型の解ともいう.
2. 解の形が $a = 2^e rq, (r < q:$ 素数$)$ となるとき第二正規解という. 一般に D 型の解という.
3. 解の形が素数のべき $a = q^e$,$(e:$ 任意$)$ の場合は C 型の解という. $m = 1, a = 2^e$: がその例であり, 素数べきの一般解ともいう.
4. m_0 : 完全数のとき, $a = m_0 q(q:$ が素数$)$ は $m = -2m_0$ だけ平行移動した広義の完全数になり, 通常解という. これを一般に B 型の解という.
5. $a = p^e$ (e は特定の数) のように素因子が 1 つの解を微小解という.

4 $m = -56$ の場合

$m = -56$ の場合は解が特に多い, $m = -56$ は $-m$ は第二完全の 2 倍という特性のあるのが一因なのだが, このののときに注目しよう.

このときの方程式は $\sigma(a) = 2a + 56$ になる.

解 a は 3 種類からなる.

$28p$: (p は 2,7 以外の素数) は $\sigma(a) - 2a = 56$ の解でありこれを通常解という.

$a = 22 = 2^5 * 7$ は通常解ではなく擬素数解である. ここではふれないがこの他に擬素数解 $2^2 * 7^3$ がある.

通常解と擬素数解排除した解の表を求めた.

これらの解は正規形 $2^e q$ および 第二正規形 $2^e rq$ からなる.

$\sigma(a) = 2a + 56$ が正規形の解 $2^e q$ を持つなら, $q = 2^{e+1} - 1 - 56$: 素数という条件を満たす.

通常型の解が非常に多いので, 28 で割れない解に制限して正規形の解だけを求めた.

5 m : 奇数の場合

m : 奇数のとき正規形, 第二正規形の解が基幹となっている. m : 奇数のときは解が実に少ないのだが根幹をなす解がないことが証明できる.

表 3: $m = -56$

a	factor
84	$2^2 * 3 * 7$
140	$2^2 * 5 * 7$
224	$2^5 * 7$
308	$2^2 * 7 * 11$
364	$2^2 * 7 * 13$
476	$2^2 * 7 * 17$
532	$2^2 * 7 * 19$
644	$2^2 * 7 * 23$
812	$2^2 * 7 * 29$
868	$2^2 * 7 * 31$

表 4: $m = -56, a : 28$ で割れない解

a	factor
4544	$2^6 * 71$
9272	$2^3 * 19 * 61$
14552	$2^3 * 17 * 107$
25472	$2^7 * 199$
74992	$2^4 * 43 * 109$
495104	$2^9 * 967$
6019264	$2^6 * 163 * 577$

命題 1 m : 奇数のとき, 正規形, 第二正規形の解はない.

Proof

i.

$\sigma(a) = 2a - m$ の解として正規形 $a = 2^e q$ があるとする.

$\sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)(q + 1) - 2^{e+1}q = 2^{e+1} - q - 1$ なので

$2^{e+1} - q - 1 = -m$ により, $q = 2^{e+1} - 1 + m$. q は素数なので奇数. よって m は偶数.

ii.

第二正規形の解 $a = 2^e rq$ があるとする.

$\sigma(a) - 2a = (2^{e+1} - 1)(q + 1)(r + 1) - 2^{e+1}qr = -m$.

$A = (q + 1)(r + 1), B = qr, \Delta = q + r, N = 2^{e+1} - 1$ とおくと,

$$(2^{e+1}-1)(q+1)(r+1)-2^{e+1}qr=(2^{e+1}-1)(B+\Delta+1)-2^{e+1}B=-m$$

により

$$N(B+\Delta+1)-(N+1)B=-m.$$

よって,

$$-B+N(\Delta+1)=-m$$

$$m\equiv B+N(\Delta+1)\equiv 1+(\Delta+1)=\Delta=q+r\equiv 0 \mod 2.$$

よって m は偶数.

m : が奇数の場合を簡単な場合から扱う.

a) $m=5$ のとき

1). $s(a)=1$ を仮定する.

$\sigma(a)=2a-5$ なので, $a=p^e$ とおくと

$\sigma(a)=1+p+\cdots+p^e$, $2a-5=2p^e-5$ により

$p(1+p+\cdots+p^{e-2}-p^{e-1})=-6$ によれば p は3で割れるから $p=3$.

$$3^{e+1}-1=2(2*3^e-5)$$

によって,

$$3^{e+1}-1=4*3^e-10.$$

ゆえに, $9=3^e$. よって $e=2, a=3^2$.

2). $s(a)=2$ を仮定し矛盾を導く.

$a=p^eq^f, p<q$:素数, として $X=p^e, Y=q^f$ とおく. さらに $\overline{p}=p-1, \overline{q}=q-1, \rho'=\overline{p}\,\overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX-1)(qY-1)}{\rho'}=2XY-5$$

$$(pX-1)(qY-1)-\rho'(2XY-5)=0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと, $R=pq-2\rho'=-(p-2)(q-2)+2$.

次の定理を使うことにより $R>0$.

よって, $p=2, R=2, \rho'=\overline{q}$.

$$2XY-(2X+qY-1)=-5\overline{q}.$$

$Y(2X-q)-2X+1=5\overline{q}$ を変形して

$$Y=\frac{2X-1-5\overline{q}}{2X-q}=\frac{2X-q-4\overline{q}}{2X-q}.$$

さらに変形して

$$Y-1=\frac{-4\overline{q}}{2X-q}.$$

ここで場合を分ける.

i). $f=1$. $Y=q$ なので

$$Y-1=\overline{q}=\frac{-4\overline{q}}{2X-q}.$$

$4 = q - 2X$, から $q = 4 + 2X$ なので $q = 2$; 矛盾.

ii). $f > 1$. $Y = q^f$ なので

$$Y - 1 = \overline{q}(q^{f-1} + \cdots + q + 1) = \frac{-4\overline{q}}{2X - q}.$$

$4 = (q - 2X)(q^{f-1} + \cdots + q + 1)$ から $f = 2, q = 3$. $q = 1 + 2X$ なので $X = 1$; 矛盾.

6　m : 奇数の場合の証明

$\sigma(a) - 2a = -m$ の解の一般的な研究は困難をきわめるので $s(a) = 2$ を満たす場合に限って研究する.

$a = p^e q^f, p < q$:素数として $X = p^e, Y = q^f$ とおく.　さらに $\overline{p} = p - 1, \overline{q} = q - 1, \rho' = \overline{p}\ \overline{q}$ を使うと

$$\frac{(pX - 1)(qY - 1)}{\rho'} = 2XY - m$$

$$(pX - 1)(qY - 1) - \rho'(2XY - m) = 0$$

を得るがこの左辺の XY の係数を R とおくと,

$$(pX - 1)(qY - 1) - \rho'(2XY - m) = RXY - pX - qY + 1 + \rho' m = 0$$

定義により

$$R = pq - 2\rho' = -(p - 2)(q - 2) + 2.$$

$q > p \geq 3$ と仮定する.
$R = -(p - 2)(q - 2) + 2 \leq 4 - q \leq -1$.

$$1 + \rho' m = -RXY + pX + qY - 1 \geq XY + pX + qY.$$

これより $m < 0$ は成り立たない.　したがって, $m < 0$ なら $R > 0$ になりさらに $p = R = 2$.
不等式にして

$$mpq > m\rho' \geq XY + pX + qY - 1.$$

相加・相乗平均により

$$pX + qY \geq 2\sqrt{pqXY}.$$

一方, $e=1$ なら $\sigma(X)=\sigma(p)=1+p$:偶数. このとき $\sigma(a)-2a=-m$ は偶数.

しかし m : 奇数 を仮定しているので $e \geq 2$ となる.

同様に $f \geq 2$.

それゆえ $X \geq p^2, Y \geq q^2$ により

$$1+mpq > XY + pX + qY \geq p^2q^2 + 2\sqrt{p^3q^3} = pq(pq+2\sqrt{pq}).$$

$$1 > pq(pq+2\sqrt{pq}-m).$$

よって,

$$0 \geq pq + 2\sqrt{pq} - m.$$

$$m \geq pq + 2\sqrt{pq}$$

$q > p \geq 3$ で $m_0 = pq + 2\sqrt{pq}$ の値を評価すると, 次の表になる.

表 5: $m_0 = pq + 2\sqrt{pq}$ の表

q	$p=3$	5	7	11	13
5	22.74596669	35	46.83215957	69.83239697	81.1245155
7	30.16515139	46.83215957	63	94.54992877	110.078784
11	44.48912529	69.83239697	94.54992877	143	166.9165215
13	51.489996	81.1245155	110.078784	166.9165215	195

これによって, $m > m_0 = 22.74596669$ になる.

このとき $p=3, q=5$.　次の表によれば $m=47$.

$m > m_0 = 30.16515139$ になる.

このとき $p=3, q=7$.　次の表によれば $m=141$.

よって $m \leq 46$ のとき $p=2, R=2$.

m が最小になる場合は $p=3, q=5$ になり $m=47$.

m が次の最小になる場合は $p=3, q=7$ になり $m=141$.

したがって,

以上をまとめて定理とする.

定理 1　*1.* $m<1$ なら $p=2, R=2$.

表 6: $m = 2a - \sigma(a)(a = p^2q^2)$ の表

q	$p = 3$
5	47
7	141
11	449

表 7: $m = 2a - \sigma(a)(a = p^2q^2)$ の表

q	$p = 5$
7	683
11	1927

2. m : 奇数なら $m < 47$ のとき $p = 2, R = 2$.

3. m : 奇数なら $48 < m < 141$ のとき $p = 2, R = 2$.

7 $p = 2, R = 2$

$p = 2$ とすると $\rho' = \overline{q}, R = 2$ となり 基本方程式は

$$-2XY + 2X + qY - 1 = m\overline{q}.$$

これより

$$Y(q-2X) + 2X - 1 = Y(q-2X) + 2X - q - 1 + q = (q-2X)(Y-1) + \overline{q} = m\overline{q}.$$

$$Y - 1 = \frac{\overline{qm}}{q - 2X}.$$

したがって $\overline{q}$ で割れば

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{m-1}{q-2X}.$$

$q - 2X$ は $\overline{m}$ の約数になる.

8　m:奇数で正の場合

8.1　$m = 5$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 3^2$.

8.2　$m = 7$

このとき $a = p^e$ の形の解はない.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 7 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{6}{q - 2X}.$$

i. $q - 2X = 1$ $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$. によれば $q = 5, f = 2$.
$q - 2X = 5 - 2X = 1$ より $X = 2$. よって $a = 2 * 5^2$.

8.3　$m = 19$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2$ とする.
$m = 19 < 21$ によって,

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{18}{q - 2X}.$$

$f = 1$ ならば $q - 2X = 18$. q : 偶数となり矛盾.
$\frac{18}{q - 2X} \geq 1 + q \geq 4$ によって,
i. $q - 2X = 3$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ によって, $f = 2, q = 5$. $q - 2X = 3; X = 1$ となり矛盾.
ii. $q - 2X = 1$.
$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 18$ によって, $f = 2, q = 17$. $q - 2X = 1; X = 8$. $a = 2^3 * 17^2$.

8.4　$m = 37$

このとき $a = p^e$ の形の解があり $a = 5^2$.
$s(a) = 2, p = 2$ とする.

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{36}{q - 2X}.$$

$f=1$ ならば $q-2X=36$. q : 偶数となり矛盾.

$\dfrac{36}{q-2X} \geq 1+q \geq 4$ によって,

i). $q-2X=3$.

$q^{f-1}+\cdots+q+1=12$ によって, $f=2, q=11$. $q-2X=3; X=4$ となり $a=2^2*11^2$.

ii). $q-2X=1$.

$q^{f-1}+\cdots+q+1=36$ によって, $f=2, q=35$ 矛盾.

9 m : 奇数で負の場合

次の結果は m : 奇数で負の場合, $a \leq 1000000$ の範囲で調べた結果である.

表 8: $[P=2, m<0 :]$ 奇数, 完全数

	a	素因数分解
-89	13456	2^4*29^2
-71	392	2^3*7^2
-65	200	2^3*5^2
-59	968	2^3*11^2
-51	72	2^3*3^2
-41	1352	2^3*13^2
-39	162	$2*3^4$
-31	15376	2^4*31^2
-19	36	2^2*3^2
-7	196	2^2*7^2
-3	18	$2*3^2$

意外なことに, これから分かること m : 奇数で正の場合に比べると制約が強いらしい.

命題 2 *m : 奇数で $m<0$ の場合, $s(a)=1$ の解はない.$s(a)=2$ の 解は $a=2^eq^f$ となり f は偶数.*

Proof.

$$\overline{q}\sigma(a)=(2^{e+1}-1)(q^{f+1}-1)=2^{e+1}q^f\overline{q}-m\overline{q}$$

により $N=2^{e+1}-1$ を用いて整理すると

$$N(q^{f+1}-1)-(N+1)q^f(q-1)=\overline{q}(q^f-m)$$

を N についてまとめると

$$N(q^f-1)=\overline{q}(q^f-m)$$

$$N(q^{f-1}+\cdots+1)=q^f-m.$$

2 を法とすると

$$q^f\equiv 1, N\equiv 1, q^{f-1}+\cdots+1\equiv f \mod 2.$$

$f\equiv -m+1\equiv 0 \mod 2$ により f は偶数.

1. $m=-1$, すなわち $\sigma(a)-2a=1$ の場合. 解は無いと予想されている.

$\sigma(a)-2a=1$ を満たす a は 未発見にもかかわらず 疑似完全数 (pseudo perfect number) と呼ばれている.

疑似完全数の発見は宇宙生物の発見より可能性が低いと思う.

2. $m=-3$ すなわち $\sigma(a)-2a=3$ の場合. $a=2*3^2$ は解. 他の解は無いと予想されている.

これらを証明することはきわめて難しい. そこで $s(a)=1,2$ を満たす場合に絞って証明する.

$m<0$ のとき条件は自動的に満たされ, $p=2, R=2$.　これにより計算が容易にできる.

9.1　$m=-3$

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-3-1}{q-2X}=\frac{4}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=4, f=2$ により, $2X=q+1=4.X=2, a=2*3^2$.

ii. $2X-q>1$ は起きない.

9.2　$m=-7$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{-7-1}{q-2X}=\frac{8}{2X-q}.$$

i. $2X-q=1$. $q+1=8, q=7, f=2$ により, $2X=q+1=8.X=4, a=2^2*7^2$.

ii. $2X-q>1$ は起きない.

9.3　$m=-17$

$p=2, R=2$.

$$q^{f-1}+\cdots+q+1=\frac{18}{2X-q}.$$

i. $2X-q=3$. $q+1=6, q=5, f=2$ により, $2X-q=3.X=4, a=2^2*5^2$.

ii. $2X-q=1,2$ は起きない.

9.4 $m = -31$

$p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{-31-1}{q-2X} = \frac{32}{2X-q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q + 1 = 32, q = 31, f = 2$ により, $2X = q + 1 = 32.X = 16 = 2^4, a = 2^4 * 31^2$.

ii. $2X - q = 2, 4, 8$ は起きない.

9.5 $m = -39$

$p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{40}{2X-q}.$$

i. $2X - q = 1$. $q^3 + q^2 + q + 1 = 40, q = 3, f = 4$ により, $2X = q + 1 = 4.X = 2, a = 2 * 3^4$.

9.6 $m = -41$

$p = 2, R = 2.$

$$q^{f-1} + \cdots + q + 1 = \frac{42}{2X-q}.$$

i. $2X - q = 3$. $q + 1 = 14, q = 13, f = 2$ により, $2X = q + 3 = 16; a = 2^3 * 13^2$

ii. $2X - q = 7$. $q^{f-1} + \cdots + q + 1 = 6$ なので $f = 2, q = 5$. $2X - q = 7$ によれば $X = 1$; 矛盾