# 数学の研究をはじめよう 2017/oct<br>劣完全数の素敵なA 型の世界 $P=3$,<br>後編その 1

飯高 茂　HP:iitakashigeru.web.fc2.com

2017 年 5 月 26 日

## 1　はじめに

## 2　完全数

ユークリッドの完全数の定義は次のとおり.

$p=2^{e+1}-1$ が素数のとき $a=2^e p$ をユークリッドの完全数という.

$m$ だけ平行移動した場合も考える.

$p=2^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=2^e p$ を $m$ だけ平行移動したユークリッドの完全数という.

$\sigma(a)$ で自然数 $a$ の約数の和を示す. $\sigma(a)$ を. ユークリッド関数という.

$a$ が $m$ だけ平行移動したユークリッドの完全数のとき $\sigma(a)=2a-m$ を満たす.

$p=2^{e+1}-1+m$ の 2 を奇素数 $P$ に変更し $q=P^{e+1}-1+m$ が素数のとき $a=P^e q$ を底 $P$, 平行移動 $m$ の狭義の劣完全数 ( subperfect number) といい, このときの $q$ をサブ素数 ( subprime number) という.

劣完全数の満たす方程式は次のようになる.

$$\overline{P}\sigma(a)=Pa-m.$$

$\overline{P}=P-1$ でありこの記号は今後もよく使う.

方程式の解を底 $P$, 平行移動 $m$ の広義の劣完全数 ( subperfect number with translation parameter $m$) というのである. 広義の劣完全数を簡単に劣完全数という.

$P=2$ のとき方程式はすぐ前に書いた $\sigma(a)=2a-m$ になる.

$P>2$ なら, $m=0$ のとき $q=P^{e+1}-1+m=P^{e+1}-1$ は素数にならない. しかし, 例外が 1 つだけあり $e=0, P=3$ のとき,$q=2$ は素数で $a=2$ となる.

$P=3$ で $m$ が偶数の場合は解が少ないので $m<50$ の場合は解をすべて求めた. $P=2$ のときすなわち歴史的な完全数, およびその平行移動において解をすべて求めることは難しい. 現代の数学ではできそうもない.

これに比べると $P=3$ で $m$ が偶数の場合の劣完全数は原理的に解をすべて求めることが可能である. これは著しい成功であった

しかし $P=3$ で $m$ が奇数の場合は解をすべて求めることはきわめて困難である. 実例を丁寧にみて計算で求められた解を体系的に調べ解の構造を把握することに努める.

## 3 $P=3$ で $m$ が奇数の場合

コンピュータで解を求める. 解 $a$ についてその素因数分解を wxmaxima の factor(a) で求める.

$m=1$ 解の状況 C 型

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $3=3$ | $9=3^2$ | $27=3^3$ | $81=3^4$ | $243=3^5$ |
| $729=3^6$ | $2187=3^7$ | $6561=3^8$ | $19683=3^9$ | $59049=3^10$ |

無限に $3^e$ が出てくることは確かであるが. $3^e$ と書けない解があるかもしれない. とりあえずこれらのように $P$ の累乗がたくさん出た場合 $P^e$ を C 型の解という.

m=3 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),G(5),F(5*7*11)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5=5 | $33=3*11$ | $261=3^2*29$ | $385=5*7*11$ |
| $897=3*13*23$ | $,2241=3^3*8$ | $26937=3^2*41*73$ | $46593=3^2*31*167$ |

m=5 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),G(7)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7=7 | $39=3*13$ | $279=3^2*31$ | $178119=3^5*733$ |

m=7 解の状況 なし

m=9 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),E(オビ),G(11)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11=11 | $35=5*7$ | $51=3*17$ | $2403=3^3*89$ |
| $20331=3^4*251$ | $54723=3*17*29*37$ | $68643=3^2*29*263$ | $103683=3*17*19*107$ |

$P^e q$ $(P < q:$素数$)$ の形の解を正規形の解, または A 形の解という.

素因数分解が $P^e qr$ $(P < r < q:$素数$)$ の形の解を第二正規形の解, または D 形の解という.

m=11　解の状況 A(正規形),E(オビ),$G(13)$, $F(3*11^2*43)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13=13 | $57 = 3*19$ | $333 = 3^2*37$ | $15609 = 3*11^2*43$ | $179577 = 3^5*739$ |

m=13 解の状況 $G(5^2)$

$25 = 5^2$

m=15 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),E(オビ),G(17)

| | | |
|---|---|---|
| 17=17 | $69 = 3*23$ | $369 = 3^2*41$ |
| $1221 = 3*11*37$ | $20817 = 3^4*257$ | $149765 = 5*7*11*389$ |
| $180549 = 3^5*743$ | | |

m=17 解の状況 A(正規形),G(19),$F(3*11^2*43)$

| | | |
|---|---|---|
| 19=19 | $387 = 3^2*43$ | $2619 = 3^3*97$ |

m=19 解の状況 なし

m=21 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),E(オビ),$G(23)$, $F(5*7*13)$

| | | |
|---|---|---|
| 23=23 | $55 = 5*11$ | $87 = 3*29$ |
| $423 = 3^2*47$ | $455 = 5*7*13$ | $2727 = 3^3*101$ |
| $21303 = 3^4*263$ | $845127 = 3^3*113*277$ | |

m=23 解の状況 A(正規形)

| | | |
|---|---|---|
| $93 = 3*31$ | $2781 = 3^3*103$ | $182493 = 3^5*75$ |

m=25 解の状況 $F(3*11^2)$

| |
|---|
| $363 = 3*11^2$ |

m=27 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),E(オビ),$G(29)$, $F(5*13)$

| | | |
|---|---|---|
| 29=29 | $65 = 5*13$ | $477 = 3^2*53$ |
| $969 = 3*17*19$ | $1353 = 3*11*41$ | $2889 = 3^3*107$ |
| $21789 = 3^4*269$ | $70209 = 3^2*29*269$ | $159753 = 3*11*47*103$ |

m=29 解の状況 A(正規形),E(オビ),G(31),$F(5^2*7)$,

| | | |
|---|---|---|
| 31=31 | $111 = 3*37$ | $175 = 5^2*7$ |
| $2943 = 3^3*109$ | $21951 = 3^4*271$ | $183951 = 3^5*757$ |

m=31 解の状況 なし
m=33 解の状況 A(正規形),D(第二正規形),E(オビ),$G(7^2)$

| | | |
|---|---|---|
| $49 = 7^2$ | $123 = 3 * 41$ | $531 = 3^2 * 59$ |
| $1131 = 3 * 13 * 29$ | $1419 = 3 * 11 * 43$ | $3051 = 3^3 * 113$ |
| $25803 = 3^2 * 47 * 61$ | $48267 = 3^2 * 31 * 173$ | $70731 = 3^2 * 29 * 271$ |
| $184923 = 3^5 * 761$ | $813579 = 3 * 13 * 23 * 907$ | |

m=35 解の状況 A(正規形),E(オビ),G(37),$F(5^2 * 7 * 19 * 181)$

| | | |
|---|---|---|
| 37=37 | $129 = 3 * 43$ | $549 = 3^2 * 61$ |
| $22437 = 3^4 * 277$ | $601825 = 5^2 * 7 * 19 * 181$ | |

# 4 解の分類

A 型の解のある場合の $m$ を列挙しよう.
$m =$ 3,5,9,11,15,17,21,23,27,29,33,35
これは次の 2 系列に分解できる.
3 から 6 を足していく.
$m$ =3,9,15,21,27,33
5 から 6 を足していく.
$m$ =5,11,17,23,29,35
すなわち $m \equiv 3, 5 \mod 6$.
これ以外の奇数 $m$ は $m \equiv \mod 6$ を満たす.
$m =$ 1,7,13,19,25,31 が該当する.
実際に上の例では
$m =$ 7,19,31 のとき解は無い.
$m =$ 13，25 のとき孤立解.
ここで大胆予測をたてる:
**予測**
方程式 $2\sigma(a) - 3a = -m$ において,
$m \equiv 3, 5 \mod 6$ のとき A 型の解があり, 無数の解をもつ.
$m \equiv 1 \mod 6$ のとき解はあっても孤立解で有限個しかない.

**命題 1** $m \equiv 1 \mod 6$ のとき *A* 型の解はない.

A 型の解 $a = 3^e q, (q$ :3 で割れない) が方程式 $2\sigma(a) - 3a = -m$ の解とする.
$N = 3^{e+1} - 1$ とおけば $2\sigma(a) - 3a = N(q+1) - (N+1)q = N - q$ により $N - q = -m$. $m = 1 + 6k$ と仮定すると

$$q = N + m = 3^{e+1} - 1 + 1 + 6k = 3^{e+1} + 6k.$$

右辺は素数になりえない.

強いて言えば, $e = 0, k = 0$ のとき, $q = 3, m = 1$. $q$ が 3 で割れるので矛盾.

## 5 正規形の解

以上の解で素因数分解が $P^e q$ $(P < q:$ 素数$)$ の形の解が多いのでこれを正規形の解, または A 型の解という.

$a = P^e q$ を $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$ の左辺に代入すると,

$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e q) = (P^{e+1} - 1)(q + 1)$ なので $N = P^{e+1} - 1$ とおくとき

$\overline{P}\sigma(a) = N(q + 1) = Nq + N$ とかける. さらに $Nq = (P^{e+1} - 1)q = Pa - q$. したがって, 左辺は $\overline{P}\sigma(a) = Pa - q + N$.

右辺に代入すると,

$$Pa - m = P^{e+1}q - m = (N + 1)q - m = Pa - m.$$

ゆえに, $Pa - q + N = Pa - m$. これより, $-q + N = -m$. すなわち $q = N + m = P^{e+1} - 1 + m$. この式は与えられた $P, m$ に対し, $e$ を $P^{e+1} - 1 + m$ が素数になる条件で探し見つかれば, $q = P^{e+1} - 1 + m$ とおけば, $a = P^e q$ が正規形の解になる.

結果を見る限り $m = 3, 5, 9, 11$ では正規形の解がある. 正規形の解だけを見出すプログラムを使うと次のように多くの解が発見できる.

### 5.0.1 正規形の解, 計算例

表 1: $m = 3$ 正規形の解の表

| $e$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|
| 2 | 261 | $3^2 * 29$ |
| 3 | 2241 | $3^3 * 83$ |
| 7 | 14353281 | $3^7 * 6563$ |
| 9 | 1162300833 | $3^9 * 59051$ |
| 13 | 7625600673633 | $3^{13} * 4782971$ |
| 14 | 68630386930821 | $3^{14} * 14348909$ |
| 23 | 26588814359145789645441 | $3^{23} * 282429536483$ |
| 25 | 2153693963077252343529633 | $3^{25} * 2541865828331$ |

$a$ の末尾の数は 1,3.
$q$ の末尾の数は 1,3,9.

表 2: $m = 5$ 正規形の解の表

| $e$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|
| 2 | 279 | $3^2 * 31$ |
| 5 | 178119 | $3^5 * 733$ |
| 8 | 129166407 | $3^8 * 19687$ |
| 9 | 1162340199 | $3^9 * 59053$ |
| 21 | 328256967436378490439 | $3^{21} * 31381059613$ |
| 29 | 14130386091739009026274270599 | $3^{29} * 205891132094653$ |

$a$ の末尾の数は 7,9.

表 3: $m = 9$ 正規形の解の表

| $e$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|
| 3 | 2403 | $3^3 * 89$ |
| 4 | 20331 | $3^4 * 251$ |
| 7 | 14366403 | $3^7 * 6569$ |
| 12 | 847292860971 | $3^{12} * 1594331$ |
| 13 | 7625610239571 | $3^{13} * 4782977$ |
| 19 | 4052555162317068003 | $3^{19} * 3486784409$ |
| 37 | 608266787713357712721955239746840211 | $3^{37} * 1350851717672992097$ |

表 4: $m = 11$ 正規形の解の表

| $e$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|
| 2 | 333 | $3^2 * 37$ |
| 5 | 179577 | $3^5 * 739$ |
| 7 | 14370777 | $3^7 * 6571$ |
| 17 | 50031546390401337 | $3^{17} * 387420499$ |
| 35 | 7509466514979725304262166948254617 | $3^{35} * 150094635296999131$ |

$m = 7$　の場合は正規形の解がないらしい.
$q = 3^{e+1} - 1 + 7 = 3^{e+1} + 6$ は 3 の倍数なので素数にはなりえない.
$m \equiv 1 \mod 6$ の場合も事情は同じで正規形の解がない.
この場合は解が有限個しかないかもしれない.

## 6　第二正規形の解

以上の解で素因数分解が $P^e qr$ $(P < r < q:$素数$)$ の形の解が多い. これを第二正規形の解, または D 型の解という.

$a = P^e q$ を $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$ の左辺に代入すると, $\widetilde{r} = r + 1, \widetilde{q} = q + 1, A = \widetilde{rq}, \Delta = r + q$ とおくと $A = B + \Delta + 1$.

$\overline{P}\sigma(a) = \overline{P}\sigma(P^e rq) = (P^{e+1} - 1)\widetilde{rq}$ なので $N = P^{e+1} - 1$ とおくとき

$\overline{P}\sigma(a) = NA = N(B + \Delta + 1)$ とかける. さらに $P^{e+1}rq - m = (N+1)B - m$.

したがって, 左辺は $N(B + \Delta + 1)$.

さらに $P^{e+1}rq - m = (N+1)B - m$ によれば右辺は $P^{e+1}rq - m = (N+1)B - m$.

左辺は $N(B + \Delta + 1) = NB + N(\Delta + 1)$.

ゆえに

$$N(\Delta + 1) = B - m.$$

したがって

$$B - N\Delta = N + m.$$

一方 $r_0 = R - N, q_0 = q - N$ とおき $B_0 = r_0 q_0$ を計算すると, $B_0 = r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$.

よって, $B - N\Delta = B_0 - N^2$. かくて, $N + m = B_0 - N^2$.

$D = N^2 + N + m$ とおくとき $B_0 = D$.

この式は与えられた $P, m$ に対し, $e$ を決めて $N = P^{e+1} - 1$ とおき $D$ を $B_0 = D$ とおいて 2 因子の分解を行う .

$r = r_0 + N, q = q_0 + N$ がともに素数なら $a = P^q rq$ は第二正規形の解になる.

$m = 3, n = 1$ とすると $N = 8, D = 64 + 8 + 3 = 75 = 3 * 5^2$

$r_0 = 3, q_0 = 25$ で $D$ を分解すると, $r = 11, q = 33$. 素数にならないので.

$r_0 = 5, q_0 = 15$ で $D$ を分解すると, $r = 13, q = 23$. ともに素数. 解 $a = 3 * 13 * 23$.

## 6.1 第二正規形の解; 計算例

表 5: $P = 3, m = 3$ 第二正規形の解の表

| $e$ | $D$ | $factor$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 75 | $[3, 5^2]$ | 897 | $3 * 13 * 23$ |
| 2 | 705 | [3,5,47] | 46593 | $3^2 * 31 * 167$ |
| | | | 26937 | $3^2 * 41 * 73$ |
| 5 | 530715 | [3,5,35381] | 19035755649 | $3^5 * 733 * 106871$ |
| | | | 6519443841 | $3^5 * 743 * 36109$ |
| 6 | 4780785 | [3,5,67,67,71] | 43076441601 | $3^6 * 2399 * 24631$ |

表 6: $P = 3, m = 9$ 第二正規形の解の表

| $e$ | $D$ | $factor$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 81 | $[3^4]$ | 867 | $3 * 17 * 17$ |
| 2 | 711 | $[3^2, 79]$ | 68643 | $3^2 * 29 * 263$ |
| 3 | 6489 | $[3^2, 7, 103]$ | 5026563 | $3^3 * 83 * 2243$ |
| | | | 1060803 | $3^3 * 101 * 389$ |
| 9 | 3486725361 | X | Y | Z |

$X = [3^2, 7, 29, 1908443]$
$Y = 193109562812680803$
$Z = 3^9 * 59069 * 166093589$

表 7: $P = 3, m = 15$ 第二正規形の解の表

| $e$ | $D$ | $factor$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 87 | [3,29] | 1221 | $3 * 11 * 37$ |
| 8 | 387400821 | [3,29,389,11447] | 133736311074501 | $3^8 * 20071 * 1015571$ |
| 10 | 31380882477 | $[3, 7^2, 383, 557377]$ | A | B |

A=15634813920164915589
$B = 3^{10} * 177167 * 1494504883$

表 8: $P = 3, m = 21$ 第二正規形の解の表

| $e$ | $D$ | $factor$ | $a$ | $a$ の素因数分解 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 6501 | [3,11,197] | 845127 | $3^3 * 113 * 277$ |
| 12 | 2541864234027 | [3,17,49840475177] | C | D |

C=12669042297357755142647
$D = 3^12 * 1594339 * 149523019853$

# 7 G 型の解

最初に素数べきの解を取り上げる.
$a = p^e$ が $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$ を満たすとする.
これを G 型の解といい, G($p^e$) と記す.
$\overline{P}\sigma(a) = \dfrac{\overline{P}(p^{e+1} - 1)}{\overline{p}}, Pa - m = Pp^e - m$ を変形して

$$\overline{P}\frac{p^{e+1} - 1}{\overline{p}} = Pp^e - m$$

を整理して

$$(P - 1)(p^{e+1} - 1) = \overline{p}(Pp^e - m).$$

$m\overline{p} = p^{e+1} - P(1 - p^e)$ となるが

$$m = 1 + p + \cdots + p^e - P(1 + p + \cdots + p^{e-1}).$$

$e = 1$ なら $p = m + P - 1$.

これを次のように解釈する.
$m + P - 1$ が素数 $p$ なら $p$ が解.
例：$P = 3$ のとき $m + 2$ が素数 なら $p = m + 2$ が解.

例 $m = 1$ のとき $p = 3$ が解
$m = 3$ のとき $p = 5$ が解
$m = 5$ のとき $p = 7$ が解
$m = 11$ のとき $p = 13$ が解
$m = 15$ のとき $p = 17$ が解

$e = 2$.

$m = 1 + p + p^2 - P(1 + p)$ が成り立つ.

$P = 3$ のとき $m = 1 + p + p^2 - 3(1 + p) = p^2 - 2p - 2 = (p - 1)^2 - 3$.

$m + 3$ が平方数 $r^2$. $r + 1$ が素数 $p$ なら　$p^2$ が解.

表 9: $P = 3, a = p^2$, 素数の平方解の表

| $r$ | $r^2$ | $p$ | $m$ | p 素数? | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 1 | | 9 |
| 3 | 9 | 4 | 6 | x | |
| 4 | 16 | 5 | 13 | | 25 |
| 5 | 25 | 6 | 22 | x | |
| 6 | 36 | 7 | 33 | | 49 |
| 7 | 49 | 8 | 46 | x | |
| 8 | 64 | 9 | 61 | | 81 |
| 9 | 81 | 10 | 78 | x | |
| 10 | 100 | 11 | 97 | | 121 |
| 11 | 121 | 12 | 118 | x | |
| 12 | 144 | 13 | 141 | | 169 |
| 13 | 169 | 14 | 166 | x | |
| 14 | 196 | 15 | 193 | x | |
| 15 | 225 | 16 | 222 | x | |
| 16 | 256 | 17 | 253 | | 289 |

$m = 13$ なら $a = 25 = 5^2$ が解.

# 8　E 型の解

4 個以上の異なる素数のとき ,E 型の解, またはオビという.

# 9　F 型の解

解が異なる素数の積 $a = rq, r < q$ の解がある場合を決定しよう. この解を F($rq$) と書いて一般に F 型の解という. (F 型の解には説明のつかない場合の解にも使う)

$a = rq$ が $\overline{P}\sigma(a) = Pa - m$　を満たすとする.

$A = (r + q)(q + 1), B = rq, \Delta = r + q, N = \overline{P}$ とおくとき

$$NA = N(B + \Delta + 1) = PB - m = (N + 1)B - m$$

によって $N(\Delta + 1) = B - m$ になるから, $B - N\Delta = N + m$.

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ を使うと $B_0 = r_0 q_0 = B - N\Delta + N^2$ によって, $B - N\Delta = B_0 - N^2$.

$B - N\Delta = N + m$ を用いて, $B_0 - N^2 = N + m$.

$D = N^2 + N + m$ とおくとき $B_0 = D$.

## 9.1 F 型の解の例

$P = m = 3$ $N = 2, D = 4 + 2 + m = 9$. $r_0 = 1, q_0 = 9$ とおくとき, $r = 3, q = 11$. F(3*11) が解.

```
71 ?- univ_find_pq(3,5).
D=11    [11]
a=39    $a=3*13$
true.



73 ?- univ_find_pq(3,9).
D=15    [3,5]
a=51    $a=3*17$
a=35    $a=5*7$
true.

74 ?- univ_find_pq(3,11).
D=17    [17]
a=57    $a=3*19$
true.
```

# 10 $m$ : 負の場合

```
=-27,解の状況 A,D 型
factor(663)=3*13*17,factor(759)=3*11*23,factor(1431)=3^3*53
factor(26199)=3^2*41*71,factor(53751)=3*19*23*41factor(65511)=3^2*29*251
m=-23 解の状況 G 型
factor(75)=3*5^2
m=-21 ,解の状況 A,D 型 F(5*7^2*13) 型
factor(45)=3^2*5,factor(1593)=3^3*59,factor(3185)=5*7^2*13
```

解がすこしだけ $m=-23$,

```
m=-19 解の状況 A 型
factor(63)=3^2*7,factor(1647)=3^3*61,factor(18063)=3^4*223
m=-17 解の状況 A,D 型
factor(741)=3*13*19,factor(45477)=3^2*31*163

m=-15
factor(99)=3^2*11,factor(147)=3*7^2,factor(18387)=3^4*227
factor(100347)=3*13*31*83,factor(145915)=5*7*11*379
m=-13
factor(117)=3^2*13,factor(1809)=3^3*67,factor(18549)=3^4*229

m=-9
factor(153)=3^2*17,factor(957)=3*11*29,factor(1917)=3^3*71
m=-7
factor(171)=3^2*19,factor(1971)=3^3*73
m=-3
factor(15)=3*5,factor(207)=3^2*23,factor(1023)=3*11*31
factor(2975)=5^2*7*17
m=-1
factor(21)=3*7,factor(2133)=3^3*79
m=1
factor(9)=3^2
factor(27)=3^3
factor(81)=3^4

2 ?- univ_nee_A(1,10,3,-3).
e=1     D=69    [3,23]
a=1023  $a=3^1*11*31$
e=2     D=699   [3,233]
e=3     D=6477  [3,17,127]
a=5017599       $a=3^3*83*2239$
a=1207359       $a=3^3*97*461$
e=4     D=58803 [3,17,1153]
```