究極の完全数と超完全数 後編
超メルセンヌ素数

飯高 茂

1 究極の完全数

自然数 a についてその約数の和を $\sigma(a)$ であらわす.

P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ. これは次の式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1). \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

底が素数: P , 平行移動 : m の狭義の超完全数の定義:

$r=P^{f+1}-P+1+m$ が素数のとき,$\alpha=P^fr$ は完全数の一般化であり, これを底が素数: P , 平行移動 : m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W=P^{f+1}-1$ とおく. 定義により $r=P^{f+1}-P+1+m=W-P+m+2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=\overline{P}\sigma(P^fr)=W(r+1)=Wr+W.$$

$Wr=(P^{f+1}-1)r=P\alpha-r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=Wr+W=P\alpha-r+W.$$

これより次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2-m.$$

この解を底が素数: P , 平行移動 : m の広義の超完全数という.

1.1 $P=5$, 超完全数

$m=-1,3$ のとき解なし $m=0$ のとき $1950625=5^4*3121$ のみ
$m=2$ なら少し解が見える

表 1: $P=5, m=2$ のときの解

a	factor
3	3
115	$5*23$
29491	$7*11*383$

2 究極の完全数と超完全数

底 P, 平行移動 m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}.$$

において, $a=P^erp$ を解とする. ここで最大素因子 q に関係しない解を探す. これは いわゆる B 型の解なのである.

$N=P^{e+1}-1, A=(r+1)(p+1), B=rp, \Delta=r+p$ とおくとき
$\overline{P}\sigma(a)-Pa=NA-(N+1)B=N(\Delta+1)-B$ なので究極の方程式から

$$N(\Delta+1)-B=(P-2)p-m\overline{P}.$$

$N(r+q+1)-rp=(P-2)p-m\overline{P}$ を p について整理すると

$$p(N-r-P+2)+N(r+1)+m\overline{P}=0.$$

ここで,p の係数 $N-r-P+2$ を 0　としさらに $N(r+1)+m\overline{P}=0$　が成り立つとして関係式を決定数する. $N-r-P+2$ から $r=N-P+2=P^{e+1}-P+1$ になりこれが素数になるのが条件である. この素数を 超メルセンヌ素数という. $\alpha=P^er$ は狭義の超完全数になる.

素数でない場合をこめて一般に $r=P^{e+1}-P+1$ を弱超メルセンヌ素数という.

表 2: $P = 3$ の超メルセンヌ素数 r

e	r
3	79
4	241
5	727
8	19681

表 3: $P = 3$ の弱超メルセンヌ数 r

e	r	factor
1	7	7
2	25	5^2
3	79	79
4	241	241
5	727	727
6	2185	$5 * 19 * 23$
7	6559	$7 * 937$
8	19681	19681
9	59047	$137 * 431$
10	177145	$5 * 71 * 499$
11	531439	$113 * 4703$
12	1594321	$197 * 8093$

表 4: $P = 7$ の超メルセンヌ素数 r

e	r
1	43
2	337
5	117643
8	40353601

3 超メルセンヌ素数の諸例

$e = 1, 3, 4, 5, 8$ に対応する部分が 超メルセンヌ素数.
$P = 5$ の超メルセンヌ数 r は前の号で扱った.
$N(r+1) + m\overline{P} = 0$ 　を書き直すと $-m = (1 + P + \cdots + P^e)(r+1)$.

この m について平行移動した超完全数を求める．すなわち次の方程式の解を求める．

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}.$$

3.1　$P=2$ のときの説明

わかりやすくするため, $P=2$ のときに戻る．

完全数 6 の 2 倍の 12, に対して $m=-12$ とおき,$\sigma(a)=2a+12$ の解は通常解 $6p$ 以外に擬素数解, エイリアン解などあった．エイリアン解のような面白い解を見つけよう．これが動機である．

3.2　$P=3, e=1$ の場合の計算例

$P=3, e=1$ の場合 $r=7, -m=4*8=32$ なので方程式は

$$2\sigma(a)-3a = q+2*32.$$

3　16　2^4
4　178　$2*89$
5　664　2^3*83
6　2122　$2*1061$
7　6496　2^5*7*29

$e=4$,$q=89$,$a=3^4*89=7209$

表 5: $2\sigma(a)-3a=q+2*32$ の解

a	factor
231	$3*7*11$
273	$3*7*13$
357	$3*7*17$
399	$3*7*19$
483	$3*7*23$
609	$3*7*29$
651	$3*7*31$
777	$3*7*37$

最初の解 $a=58851=3^2*13*503$ が理解できない．それ以外は通常解 3^3*79*q である．

表 6: $2\sigma(a) - 3a = q + 2 * 32$ の解 , 続き

a
7077
7209
7287

解は $a = 3 * 7 * p$ の形である. いわゆる通常解 $P = 3, e = 3$ の場合 $r = 79$, $-m = 40 * 80 = -320$

e	r
1960227	$3^3 * 79 * 919$
1981557	$3^3 * 79 * 929$
1998621	$3^3 * 79 * 937$

$m = -3200$ A 型解

表 9: $m = -3200$ A 型解

e	r
26	3812798739293
34	25015772549496653
44	1477156353275416846121

$P = 7, e = 1$ の場合 $r = 43, -m = 8 * 44 = -352$ なので方程式は

$$6\sigma(a) - 7a = 5q - 4 * m = 5q + 4 * 352.$$

通常解 $7 * 43 * q$

4　第二正規解

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2) - m$ の解に第二正規解の解 $\alpha = P^e rq, (P < r < q :$ 素数), となる解があるとする.

表 10: $6\sigma(a) - 7a = 5q - 4 * m = 5q + 4 * 352$ の解

a	factor
14147	7*43*47
15953	7*43*53
17759	7*43*59
18361	7*43*61
20167	7*43*67
21371	7*43*71
21973	7*43*73

表 11: A 型解

e	r
8	6725249
20	93090977347213649
28	536650959302196621139249

$W = P^{e+1} - 1$ とおくとき $\widetilde{r} = r + 1, \widetilde{q} = q + q, A = \widetilde{r}\widetilde{q}, \overline{P}\sigma(\alpha) = W\widetilde{r}\widetilde{q} = WA, B = rq, \Delta = r + q, X = (P-2) - m, P\alpha = (W+1)B$ を用いて

左辺は $\overline{P}\sigma(\alpha) = W\widetilde{r}\widetilde{q} = WA = W(B + \Delta + 1)$

右辺は $P\alpha + (P-2) - m = (W+1)B + X$.

よって

$$W(B + \Delta + 1) = (W+1)B + X.$$

これより

$$W\Delta + W = B + X.$$

よって, $W - X = B - W\Delta$.

$r_0 = r - W, q_0 = q - W, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき $B_0 = r_0 q_0 = B - \Delta W + W^2$.

$$B_0 = B - \Delta W + W^2 = W - X + W^2$$

$D = W^2 + W - X$ とおくとき $B_0 = D$.

与えられた P, m に適切な自然数 e を取り $W = P^{e+1} - 1, X = (P-2) - m$ とおき, $D = W^2 + W - X$ と定める.

$B_0 = D$ と 2 因子分解を行い得られた r_0, q_0 について $r = r_0 + W, q = q_0 + W$ がともに素数なら解 $\alpha = P^e rq$ が得られる.

4.1　計算例

$P = 3, m = 10, e = 2$ のとき,$W = 3 - 3 - 1 = 26, D = 711 = 3^2 * 79$. $r_0 = 3, q_0 = 237, r = 29, q = 263$ であり解　$\alpha = 68643 = 3^2 * 29 * 263$