究極の完全数と超完全数 前編

飯高 茂

1　究極の完全数

自然数 a についてその約数の和を $\sigma(a)$ であらわすとき, $\sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ を満たす.　これはユークリッドによる公式である.

したがって, $q = 2^{e+1} - 1 + m = \sigma(2^e) + m$ となる. これが素数のとき $a = 2^e q$ を m だけ平行移動した狭義の完全数という. そして $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす. そこで一般に $\sigma(a) = 2a - m$ を満たす自然数 a を. m だけ平行移動した広義の完全数という. $m = 0$ のときが元祖完全数であり, この場合広義の完全数は狭義の完全数になるという予想が 2000 年以上にわたって解けない大難問として残されている.

さて 2 を一般にしてみよう. P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e) + m$ が素数 q のとき $a = P^e q$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ.

m だけ平行移動した場合を考えることは重要であり, これによって完全数の研究が奥深くなったのである. この場合の方程式も比較的シンプルである.

$$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)\mathrm{Maxp}(a) - m(P-1). \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

2　$P = 2$ のとき

$P = 2$ のときは以前に扱ったが考え方を整理するため再度考察する. $m < 0$ の場合のみを扱う.

2.1 $[P=2, m=-2]$ 完全数

表 1: $[P=2, m=-2]$ 完全数

a	素因数分解
20	$2^2 * 5$
104	$2^3 * 13$
464	$2^4 * 29$
650	$2 * 5^2 * 13$
1952	$2^5 * 61$
130304	$2^8 * 509$

解 $a = 650 = 2 * 5^2 * 13$ は異形の解だが他は $2^e q, q$: 素数の形でありこれを正規形の解という.A 型の解ともいう.

3　第1完全数 6 について

3.1　$m = -12$ のとき

$m = -12$ のとき m だけ平行移動した広義の完全数は非常に多い. $\sigma(a) = 2a + 12$ を満たす解を調べる.

表 2: $[P = 2, m = -12]$ 完全数

a	素因数分解
24	$2^3 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
54	$2 * 3^3$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$

$a = 6p, (p \neq 2, 3 :$ 素数$)$ が続くので途中略す.
$a = 6p$ を通常解という. または B 型解という.
$a = 24 = 2^3 * 3$ と $a = 54 = 2 * 3^3$ は擬素数解と呼ばれている.

表 3: $[P = 2, m = -12]$ 完全数 続き

a	素因数分解
282	$2 * 3 * 47$
304	$2^4 * 19$
318	$2 * 3 * 53$
354	$2 * 3 * 59$
366	$2 * 3 * 61$
402	$2 * 3 * 67$

ここで通常の解 $6p$ と異なる異形な解 $a = 304 = 2^4 * 19$ が出てきた. これをエ

イリアンという. これは正規形 $2^e q$ なので正規形としての一般の解を探す. この場合 $2^e q$ が解なら $q = 2^{e+1} - 13$: 素数, を満たす.

正規形も求めるプログラムを用いて次の解の表がえられた.

表 4: $[P = 2, m = -12; a = 2^e q]$ 正規解

e	a	素因数分解
3	24	$2^3 * 3$
4	304	$2^4 * 19$
8	127744	$2^8 * 499$
12	33501184	$2^{12} * 8179$
16	8589082624	$2^{16} * 131059$
56	A	B

ここで $A = 10384593717069654320312270165377024$
$B = 2^{56} * 144115188075855859$

$a = 24$ を除くと,

$$e \equiv 0 \mod 4, q \equiv 9 \mod 10, a \equiv 4 \mod 10$$

を満たす. すなわち, q の末尾の数は 9, a の末尾の数は 4. 元祖完全数では a の末尾の数は 6,8 であった.

以上見たように, 方程式 $\sigma(a) = 2a + 12$ 　には解として
通常解 $a = 6p, (2 < 3 < p$: 素数),
擬素数解 $a = 24 = 2^3 * 3$, $a = 54 = 2 * 3^3$ の他に全く異質のエイリアン解の 3 種類の解がある.
この他の形もあるかもしれない.

4 B 型解のあるとき

完全数 6 の場合通常解 $m=-2\times 6$ とおく. $\sigma(a)-2a=-m$ の解には素数 p でかける解 $a=6p$ があった. これをもとに一般化しよう.

$\sigma(a)-2a=-m$ について B 型解 があるとする. すなわち定数 α があり解 $a=\alpha p$ (p,α : 互いに素) があるとする. $\alpha<p$ は無数の素数.

$$\sigma(a)-2a=\sigma(\alpha p)-2\alpha p=\sigma(\alpha)(p+1)-2\alpha p=(\sigma(\alpha)-2\alpha)p+\sigma(\alpha)$$

なので,$\sigma(a)-2a=-m$ を思い出すと

$$(\sigma(\alpha)-2\alpha)p+\sigma(\alpha)=-m$$

ゆえに

$$(\sigma(\alpha)-2\alpha)p=-\sigma(\alpha)-m$$

ここで p は無数にある素数なので

$\sigma(\alpha)-2\alpha=0$ かつ $\sigma(\alpha)=-m$ が成り立つ. $\sigma(\alpha)=2\alpha$ なので, により α は完全数, かつ $m=-2\alpha$.

完全数の平行移動によりできた式 $\sigma(a)-2a=-m$ に B 型解があるとすると再び完全数 α が $\alpha=\dfrac{-m}{2}$ として登場した.

そもそも完全数が考えられ研究されてきた理由は数学的に深い意味があるわけではなく, ユークリッド以来の伝統に基づく. しかし, ここでは $\sigma(a)-2a=-m$ に B 型解があるという数学的な問いかけに答える形で, 完全数が再定義されたのだ. 私はこの不思議さに言葉を失いこれを一般の底の究極の完全数の場合に考えようと思うに至った.

5 究極の完全数の B 型解

底が素数 P , 平行移動 m の究極の完全数の方程式

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)q-m\overline{P}$$

において B 型解 があるとする. すなわち定数 α があり解 $a=\alpha p$ (p,α : 互いに素,$\alpha<p$) があるとする. p は無数にある素数. そこで $q=p$ になる.

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a)-Pa&=\overline{P}\sigma(\alpha p)-P\alpha p\\&=p(\overline{P}\sigma(\alpha)-P\alpha)+\overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数 $\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)$ を 0 とおくと $\sigma(\alpha) = -m$.

定義 1 $\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ を満たす α を底 P の広義の超完全数 *(hyperperfect number)* という.

$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + (P-2)$ の解 α は正規形と仮定する. (正規形仮説)
$\alpha = P^f r, (r$:素数$)$ となるので,$W = P^{f+1} - 1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1), P\alpha = (W+1)r.$

$$W = r + P - 2 \tag{2}$$

$r = W - P + 2 = P^{f+1} - 1 - P + 2 = P^{f+1} - P + 1.$

定義 2 $r = P^{f+1} - P + 1$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を狭義の超完全数という.

$\alpha = P^f r$ はユークリッド完全数の一般化であり, これを狭義の超完全数 (hyper perfect number) という.

5.1 佐藤幹夫氏の思い出

超完全数 (hyper perfect number) という命名には次のような訳があった.

戦後間もないころ, 当時東大の大学院学生だった佐藤幹夫氏は, 生活を支えるため定時制の高校で非常勤講師として数学を教えていた.

30 を超える歳になりそうなとき,「このままではいけない」と一念発起して独自の観点にたって欧米の数学にはない新しい関数の革新的理論を作った.

シュワルツの超関数 (distribution) に対し佐藤先生は自分で感じた違和感をなくすために 超関数を新しく定義し, それを hyper function と呼んだ.

考えてみると, その昔, 岩村先生がシュワルツの distribution の本和訳するとき, distribution を超関数と訳したのがきっかけである. 名前の衝撃は非常に大きかった. 私は高校生のころ, 教員の研究室の図書に、岩澤健吉『代数関数論』、高木貞治『解析概論』などと並んで 『超関数』があり仰ぎ見るように表紙を外から眺めたものだ.

20 代のころ, 私は佐藤先生から新しい関数の考えを導入し 超関数と命名した経緯を喫茶店で詳しく聞くことができ, 非常に大きな感銘を受けた.

「hyper function だとギリシャ語とラテン語が混ざっているのだがね」

と言って笑っていた. 私もいつの日にか数学上の新しい概念を導入することに成功し「 ハイパー何とか」と命名できたらどんなに嬉しいことだろうと思ったものだ.

佐藤先生は 1928 年生まれであり丁度そのころ, 志村五郎, A.Grothendieck も生を受けた. 彼らは 20 世紀数学の主要な建設者であり天才と呼ばれるにふさわしい偉大な数学者である. 私は身近に佐藤先生、志村先生に接することができた. 大変幸いなことである. Grothendieck と話をしたことはない. しかしコロンビア大学で講義する姿をみた. テーマは数学ではなく, サバイバル運動についてであった. 当時、彼の取り巻きは社会活動家ばかりで数学者の姿はまったく無かった.

それから半世紀近く経ち, 超完全数の概念を導入するときが来た. 今こそ hyperperfect number と呼ぶことができる.

私の完全数の一般化理論は, アマチュアの数学愛好者が近づきやすい題材として選び研究してきたもので, 海外の究動向を一切無視して行って来た.

最近 , ある熱心なサラリーマンの受講者が完全数研究について海外の文献を調べて見せてくれた. そこには hyperperfect number がずっと前から定義されていた. 用語も同じ, 数学もほとんど同じだった. しいて言えば完全数の平行移動がない.

5.2 先行研究

1970 年に Minoli and Bear は k hyperperfect number を導入した.

Minoli, Daniel; Bear, Robert (Fall 1975), "Hyperperfect numbers", Pi Mu Epsilon Journal, 6 (3): 153?157.

定義 3 自然数 k に関して, $k\sigma(\alpha) = (k+1)\alpha + (k-1) = 0$ を満たすとき
α を $k-$*hyperperfect number* という.

命題 1 $P = k+1$ が素数で,$Q = P^i - P + 1$ も素数なら $\alpha = P^{i-1}Q$ は $k-$*hyperperfect number* になる.

私は $P = k+1$ が素数という条件は絶対に必要な条件としていた. その点で条件が強い. hyperperfect number 以外に super perfect number なども考えられていた.

次回では平行移動した超完全数について考える.