書泉講義 2018/July

スーパー完全数とスーパー双子素数

飯高 茂

2018 年 7 月 5 日

1　スーパー完全数の m だけ平行移動

1.1　完全数の m だけ平行移動

m だけ平行移動した狭義の完全数 α は定義により $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数になる e によって $\alpha = 2^e q$ と書ける. すると,

$a = 2^e$ および $N = 2^{e+1}-1$ とおくと,$N = \sigma(a)$, $q = N+m = \sigma(a)+m, q+1 = 2a+m$ を満たす.

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha) &= \sigma(2^e)\sigma(q) \\
&= Nq + N \\
&= 2\alpha - q + N \\
&= 2\alpha - m.
\end{aligned}$$

かくしてできた $\sigma(\alpha) = 2\alpha - m$ を α を未知数とみることにして平行移動 m の完全数の方程式とみなす. この解 α を平行移動 m の (広義) 完全数 (perfect number with translation parameter m) という.

平行移動を考えることにより研究すべき完全数が飛躍的に増え豊富な結果が得られるようになった.

1.2　スーパー完全数の場合

q :素数 により $\sigma(q) = q + 1$.

この左辺は $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$. 右辺は $q + 1 = 2a + m$ 一方, $q = \sigma(a) + m$ なので

$$\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

左項を抜いて次の式を得る.

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

a を未知数とみることによってこの式を平行移動 m のスーパー完全数の方程式と言うのであり, この解 a を平行移動 m のスーパー完全数という.

$m = 0$ のとき $\sigma^2(a) = \quad \sigma(\sigma(a))$ とおくと平行移動 m のスーパー完全数の方程式は $\sigma^2(a) = 2a$ となるので, 完全数の方程式 $\sigma(a) = 2a$ と類似した形になりこの解をスーパー完全数と呼ぶ.

これは D.Suryanaryana により 1969 年に導入された. また偶数スーパー完全数は 2 のべき, すなわち $a = 2^e$ となることは Suryanaryana さんにより示された. これは著しい結果である. 実際, パソコンで計算してみても奇数の解は見つからない.

ここで $q = N(a)$ は本当の メルセンヌ素数

命題 1 $a = 2^e$ が平行移動 m のスーパー完全数ならば $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数となる.

表 1: $\sigma^2(a) = 2a$ のときの解 (スーパー完全数)

a	素因数分解	q	q の素因数分解
2	2	3	3
4	2^2	7	7
16	2^4	31	31
64	2^6	127	127
4096	2^{12}	8191	8191
65536	2^{16}	131071	131071

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる. $q > 2$ なら q は奇数で, m は偶数.

したがって, m が奇数なら平行移動 m のスーパー完全数はあったとしても 2 べきにならない.

Proof.

式 $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$ に $a = 2^e$ を代入すると

$$\sigma(2^{e+1} - 1 + m) = 2^{e+1} + m.$$

$q = 2^{e+1} - 1 + m$ とおくとき, $\sigma(q) = q + 1$. よって, q は 素数.

End

ここで, $a = 2^e$ なので, $q = 2a - 1 + m$. 2 べきの解を正規解 (regular solutions) という.

命題 2 $a = 2^e$ で $q = 2^{e+1} - 1 + m$ が素数なら a はスーパー完全数となる.

とくに $2^e q$ は平行移動 m の狭義の完全数になる.

Proof.

q は素数なので $\sigma(q) = q + 1$.

$q = 2^{e+1} - 1 + m = \sigma(a) + m, q + 1 = 2^{e+1} + m = 2a + m$.

よって, $\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m$.

End

定義 1 平行移動 m のスーパー完全数 a に対して $q = 2a - 1 + m$ を擬メルセンヌ数という.

注意 1 実例にあたると,$|m| < 10$ 位なら a が偶数の仮定だけでも $a = 2^e$ が導ける可能性がある. *(反例は $m = -28$ のときにある)*

1.3 $m=-18$

この場合,2 べきの解以外は $a=9$ と $a=3p(p\neq 5, p:$ 素数$)$ となるらしい. さらに $q=2p-7$ は素数.

表 2: $m=-18$

a	素因数分解	$p=a/3$	$q=2p-7$
15	$3*5$	5	3
16	2^4		
21	$3*7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3*13$	13	19
57	$3*19$	19	31
64	2^6		
111	$3*37$	37	67
129	$3*43$	43	79
201	$3*67$	67	127
219	$3*73$	73	139
237	$3*79$	79	151
309	$3*103$	103	199
327	$3*109$	109	211
417	$3*139$	139	271
471	$3*157$	157	307
579	$3*193$	193	379
669	$3*223$	223	439
831	$3*277$	277	547
921	$3*307$	307	607
939	$3*313$	313	619
1024	2^{10}		

この場合, 素数 p の解が多い. ただし, $q=(p-13)/6$ とおくとき q は素数になるのが十分条件.

正規解である 2 のべき以外は $3p$ と書けるほかに,$3^3=27$ がある. これは擬素数解とみることができよう.

注意 2 -18 だけ平行移動したスーパー完全数は *2* のべき以外は $3p$ と書けることが証明できればうれしい.

命題 3 $m=-18$ に対し,$a=3p(p\neq 3, p:$ 素数$)$ かつ $q=2p-7$ が素数なら $a=3p$ は解.

Proof

$m=-18$ を式 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m$ に代入すると $\sigma(\sigma(a)-18)=2a-18$.

$a=3p,(p\neq 5)$ とおくと $\sigma(a)-18=4(p+1)-28=4p-14=2(2p-7)$. ここで, $q=2p-7$ は素数と仮定する. $\sigma((\sigma(a)-18))=\sigma(2q)=3q+3$.

一方, $2a+m=6p-18=3(2p-6)=3(q+7)-18=3q+3$. よって, $\sigma(\sigma(a)-18)=2a-18$.

End

この逆が次の形で成立.

命題 4 $\sigma(\sigma(a)+m)=2a+m,\ m=-18$ のとき

$a=3L,(L\neq 0 \bmod 7)$ と書ける解があるなら, $p=L, q=2p-7$ はともに素数.

Proof.

$a=3L$ に対して, $A=\sigma(3L)-18=4\sigma(L)-18=2(2\sigma(L)-9)$ となるので

$Q=2\sigma(L)-9$ とおくとき Q は奇数で $A=2Q, \sigma(A)=2a-18=6(L-3)$.

$$\begin{aligned}\sigma(A)&=\sigma(2Q)\\&=3\sigma(Q)\geq 3Q+3\\&=6\sigma(L)-27+3\\&=6\sigma(L)-24\\&\geq 6L+6-24=6(L-3)\end{aligned}$$

$3\sigma(Q)=3Q+3$,$\sigma(A)=6(L-3)$ はすでに示されているのですべて等号成立.

$3\sigma(Q)\geq 3Q+3$, $6\sigma(L)-24=6L+6-24$ ゆえに

$$\sigma(Q)=Q+1, \sigma(L)=L+1.$$

よって, $L=p, q=2p-5$ はともに素数.

End

$p, q=2p-5$ はともに素数なのでこれはスーパー双子素数.

2　平行移動 m の スーパー完全数

$A=\sigma(a)$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす.

解 a に素数解 p があるとする.

$A=\sigma(p)+m=p+1+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(p+1+m)=2p+m$. $p=A-1-m$ を代入し,

$$\sigma(A)=2p+m=2A-2-m.$$

これは平行移動 $2+m$ の完全数の方程式とみる. さて一般に μ を完全数とするとき $\sigma(A)=2A+2\mu$ の解はよく分かっている.

i. 通常解 (B 型解)　ii. 擬素数解, iii. A 型解, iv. D 型解 v. 未知の解

そこで $-2-m=2\mu$ とおくとき, $m=-2\mu-2$ になり,5 つの型に応じて解がある.

i. 通常解 (B 型解). $A=\mu Q(Q:\mu$ と互いに素な素数). $A=p+1+m=\mu Q$ になり, $p=\mu Q+2\mu+1$:素数, Q :素数. すなわち, $Q,p=\mu Q+2\mu+1$ はスーパー双子素数.

ii. 擬素数解, $\mu=2^{\varepsilon}q,(q=2^{\varepsilon+1},q:$ 素数) のとき, $A_1=\mu q^2$, $A_2=\mu 2^{\varepsilon+1}$ が 2 つの擬素数解.

$b_1=1+2*\mu+A_1, b_2=1+2*\mu+A_1$ が素数ならよい.

不思議なことにこれらは $\mu=6,28,496,8128$ のとき解になる.

3　解 $3p$ の場合

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす解 a に素数の 3 倍解 $3p$ があるとする.

$A=\sigma(3p)+m=4p+4+m$ なので $\sigma(A)=\sigma(4p+4+m)=2a+m=6p+m$. $4p=A-4-m$ を代入するためにまず 2 倍する.

$$2\sigma(A)=12p+2m=3(A-4-m)+2m=3A-12-m.$$

ところで, 一般に $2\sigma(a)=3a+6$ の解は $a=8,2p(p>2:$ 素数) なので, $-12-m=6$ とおくとき , $m=-18$.

このとき通常解 i. $A=2Q(Q>2$:素数). ii. 擬素数解 $A=8$.

i. $A=2Q$ のとき, $A=4p-14=2Q$. これより, $Q=2p-7$. $p,Q=2p-7$ はスーパー双子素数.

ii. $A=8$ のとき, $A=4p-14=8$. これより, 解は無い.

4 $m = -28$ の スーパー完全数

表 3: $m = -28$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$	a/7
16	2^4	3	3	2.285714286
26	$2 * 13$	23	23	3.714285714
35	$5 * 7$	41	41	5
77	$7 * 11$	125	5^3	11
98	$2 * 7^2$	167	167	14
107	107	185	$5 * 37$	15.28571429
119	$7 * 17$	209	$11 * 19$	17
128	2^7	227	227	18.28571429
161	$7 * 23$	293	293	23
203	$7 * 29$	377	$13 * 29$	29
329	$7 * 47$	629	$17 * 37$	47
371	$7 * 53$	713	$23 * 31$	53
413	$7 * 59$	797	797	59
497	$7 * 71$	965	$5 * 193$	71
623	$7 * 89$	1217	1217	89
707	$7 * 101$	1385	$5 * 277$	101
917	$7 * 131$	1805	$5 * 19^2$	131
959	$7 * 137$	1889	1889	137
1043	$7 * 149$	2057	$11^2 * 17$	149
1253	$7 * 179$	2477	2477	179
1379	$7 * 197$	2729	2729	197
1589	$7 * 227$	3149	$47 * 67$	227
1631	$7 * 233$	3233	$53 * 61$	233
1799	$7 * 257$	3569	$43 * 83$	257
6491	6491	12953	12953	927.2857143
29339	29339	58649	$223 * 263$	4191.285714

解を分類すると,

i. 2^e 正規解という

ii. $7p$(p: 素数) 通常解という

iii. 素数解 107 以外にあるか

iv. $2 * 13, 2 * 7^2$ 偶数解

4.1 素数解

一般に スーパー完全数 $A=\sigma(a)+m, \sigma(A)-m=2a$ について $a=p$: 素数 p の解があるとする.

$A=\sigma(a)+m=p+1+m$ なので, $p=A-m-1$.

$$\sigma(A)=m+2a=m+2(A-m-1)=2A-m-2.$$

$m=-28$ のとき $\sigma(A)=2A+26$.

そこで 平行移動 -26 の解 A について, $A-m-1=A+27$ が素数pなら これが解.

表 4: $m=-26$ 完全数

A	factor	$A+27$	factor
80	2^4*5	107	107
1184	2^5*37	1211	$7*173$
6464	2^6*101	6491	6491
29312	2^7*229	29339	29339
78975	3^5*5^2*13	79002	$2*3^3*7*11*19$
510464	2^9*997	510491	$41*12451$
557192	2^3*17^2*241	557219	$13*42863$

$A+27$ が素数になるのは 107,6491,29939. これは平行移動 $m=-28$ のスーパー完全数の素数解. したがって, 107 以外の素数解　6491,29939 がみつかった.

4.2 $m = -18$

この場合,2 べきの解以外は $a = 9$ と $a = 3p(p \neq 5, p:$ 素数$)$ となるらしい. さらに $q = 2p - 7$ は素数.

表 5: $m = -18$

a	素因数分解	$p = a/3$	$q = 2p - 7$
15	$3 * 5$	5	3
16	2^4		
21	$3 * 7$	7	7
27	3^3	9	
39	$3 * 13$	13	19
57	$3 * 19$	19	31
64	2^6		
111	$3 * 37$	37	67
129	$3 * 43$	43	79
201	$3 * 67$	67	127
219	$3 * 73$	73	139
237	$3 * 79$	79	151
309	$3 * 103$	103	199
327	$3 * 109$	109	211
417	$3 * 139$	139	271
471	$3 * 157$	157	307
579	$3 * 193$	193	379
669	$3 * 223$	223	439
831	$3 * 277$	277	547
921	$3 * 307$	307	607
939	$3 * 313$	313	619
1024	2^{10}		

この場合, 素数 p の解が多い. ただし, $q = (p - 13)/6$ とおくとき q は素数になるのが十分条件.

正規解である 2 のべき以外は $3p$ と書ける軍団のほかに,$3^3 = 27$ がある. これは擬素数解とみることができよう.

注意 3 -18 だけ平行移動したスーパー完全数は *2* のべき以外は $3p$ と書けることが証明できればうれしい.

5　$a = \varpi p$

以上の議論をもとに一般化する．

$A = \sigma(a) + m$ とおくとき $\sigma(A) = 2a + m$ を満たす解 a に素数 p の ϖ 倍解 ϖp が数多くあるとする．$a = \varpi p$ になる．

ここでの結果は, $m = -28, m = -18$ のときのみ起こるということである．

$\sigma(a) = \sigma(\varpi p) = \sigma(\varpi)(p+1)$ なので $A = \sigma(a) + m = \sigma(\varpi)(p+1) + m$.

ゆえに, $p + 1 = \dfrac{A-m}{\sigma(\varpi)}$. 整理して

$$p = \frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}.$$

$\sigma(A) = 2a + m = 2\varpi p + m$ によって,

$$\sigma(A) = 2\varpi(\frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}) + m$$

を整理して

$$\sigma(\varpi)\sigma(A) = 2\varpi(A - m - \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi).$$

$Z = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi)$ とおくと,

$$\sigma(\varpi)\sigma(A) = 2\varpi A + Z.$$

さてこれに B 型解 $A = kQ$(Q:素数) があるとする．ここで k は Q の倍数でない定数.

$\sigma(A) = \sigma(k)(Q+1)$ により

$$\sigma(A) = \frac{\sigma(k)}{k}A + \sigma(k)$$

および

$$\sigma(A) = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}A + \frac{Z}{\sigma(\varpi)}$$

によって, A の係数を等値して

$$\frac{\sigma(k)}{k} = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$$

定数項の部分を参照して

$$\sigma(k) = \frac{Z}{\sigma(\varpi)}.$$

よって, $Z = \sigma(k)\sigma(\varpi)$.

$Z = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\sigma(\varpi)$ によって,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi) = -2\varpi(m + \sigma(\varpi)) + m\varpi = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi).$$

5.1 $\dfrac{\sigma(k)}{k}=\dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ の解

$\dfrac{\sigma(k)}{k}=\dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ を書き直すと,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi)=2k\varpi$$

ϖ を素数とすると, $\sigma(k)(\varpi+1)=2k\varpi$ を満たすような　k,ϖ をとりあえず計算機で探索した.

表 6: ϖ は素数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
4	7	7
16	31	31

これより, $k=2^e, \sigma(k)=2^{e+1}-1=2k-1$:メルセンヌ素数 $\varpi>2$ なら $\varpi=\sigma(k)$.
$\varpi=\sigma(k)=2k-1, \sigma(\varpi)=2k$, $\sigma(k)(\varpi+1)=(2k-1)*2k$.
$\sigma(k)\sigma(\varpi)=m(-2\varpi+\sigma(\varpi))-2\varpi\sigma(\varpi)$ を計算すると,
結局

$$(2k-1)k=(1-k)m-2k(2k-1).$$

$k=2$ なら, $6=-m-12$. よって, $m=-18$.
$k=4$ なら, $7*4=-3m-8*7$. $m=-28$.
$m=\dfrac{3k(2k-1)}{k-1}=6k-3+\dfrac{3}{k-1}$. よって, $k-1=1,3$. これより $k=2,4$.

事実 1 $\sigma(k)(\varpi+1)=2k\varpi$ を満たす　k, ϖ を求めることは多分難しい.

$\varpi=2$ なら $3\sigma(k)=4k$. $k=4$ が唯一の解.

表 7: ϖ 自然数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
7	8	4
4	7	7
31	32	16
16	31	31
127	128	64
64	127	127

ϖ が素数でないなら, $\varpi=2^e, \sigma(k)=2^{e+1}, k=2^{e+1}-1$. k はメルセンヌ素数になるのが計算結果. 同様の計算によって

$$k(k+1)=m(1-k)-k(k+1).$$

$-m=\dfrac{2k(k+1)}{k-1}=2k+4+\dfrac{4}{k-1}$.

ゆえに, $k-1=1,2,4$. $k=2,3,5$. $k=2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数なので, $e=1, k=3$. $\varpi=2$ は素数なので仮定に矛盾.

注意 4 (水谷一による) $\sigma(k)\sigma(\varpi)=2k\varpi$ の解については次の推論ができる.

k, ϖ を互いに素として $\beta=k\varpi$ とおくと, $\sigma(\beta)=\sigma(k)\sigma(\varpi)$ について $\sigma(\beta)=2\beta$ なので, β を偶数とすれば オイラーの定理で, $\beta=2^{\varepsilon}q, q$: 素数. したがって, k, ϖ は $2^{\varepsilon}, q$ と集合として一致する.

6 $m=-(2\mu+2)$ の スーパー完全数の解

$A=\sigma(a)+m, \sigma(A)-m=2a$ について $m=-(2\mu+2)$,(μ: 完全数) a に 素数の解 p があるとする.

$A=\sigma(a)+m=p-2\mu-1$ なので, $p=A+2\mu+1$.

$$\sigma(A)=m+2a=-2\mu-2+2p.$$

一方, $p=A+2\mu+1$ により $-2\mu-2+2p=-2\mu-2+2(A+2\mu+1)=2A+2\mu$. ゆえに

$$\sigma(A)=2A+2\mu.$$

μ : 完全数なのでこの解には

i. 通常解 (B 型)　　$A=\mu Q$, ここで Q は μ と互いに素な任意の素数.

$A=p-2\mu-1$ により, $\mu Q=p-2\mu-1$. よって, $p=2\mu+1+\mu Q$. (p,Q) はスーパー双子素数.

ii. 擬素数 $\mu=2^{\varepsilon}q$ とおくとき,　　$A_1=\mu q^2$ または $A_2=\mu 2^{\varepsilon+1}$.

iii. エイリアン　A 型解 $A=2^e\varpi, (\varpi=2^{e+1}-1-2\mu$:素数.

$p=A+2\mu+1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解 $A=\sigma(a)+m, \sigma(A)-m=2a$ $p=a$ からでる.

iv. エイリアン　D 型解 $A=2^f\pi_1\pi_2$. $p=A+2\mu+1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解

これについては数表を参照

表 8: μ, コンピュータによる調査, $b=A+2\mu+1$,$\mu=6,28,496,8128$, 擬素数解

μ	$1+2\mu$	c_1	c_2	$A_1=c_1\mu$	$A_2=c_2*\mu$	b_1	b_2
6	13	4	9	24	54	37	67
28	57	8	49	224	1372	281	1429
496	993	32	961	15872	476656	16865	477649
8128	16257	128	16129	1040384	131096512	1056641	131112769

$A_1=c_1\mu, A_2=c_2\mu$ が擬素数解, $b_1=1+2\mu+A_1$, $b_2=1+2\mu+A_2$ が素数なら A_1, A_2 は解.

この表で

477649=17*28097,16865=5*3373, 非素数

37,67,281,1429,1056641,131112679:素数

表 9: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6$

e	A, A 型解			
3	24	$2^3 * 3$	37	*prime*
4	304	$2^4 * 19$	317	*prime*
8	127744	$2^8 * 499$	127757	$7 * 18251$
12	33501184	$2^{12} * 8179$	33501197	$577 * 58061$
16	8589082624	$2^{16} * 131059$	8589082637	$1031 * 8330827$

表 10: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 28$

e	A, A 型解				
5	224	$2^5 * 7$	281	281	prime
6	4544	$2^6 * 71$	4601	$43 * 107$	
7	25472	$2^7 * 199$	25529	$7^2 * 521$	
9	495104	$2^9 * 967$	495161	prime	
15	2145615872	$2^{15} * 65479$	2145615929	$3463 * 619583$	
18	137424011264	$2^{18} * 524231$	137424011321	$7019 * 19578859$	
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$	8795973484601	$2612257 * 3367193$	

表 11: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 496$

e	A, A 型解			
9	15872	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
13	126083072	$2^{13} * 15391$	126084065	$5 * 311 * 81083$
16	8524857344	$2^{16} * 130079$	8524858337	prime
25	2251766494134272	$2^{25} * 67107871$	2251766494135265	$5 * 4567 * 98610312859$
28	144114921519448064	$2^{28} * 536869919$	144114921519449057	$811 * 18917 * 939368151$

D 型解の例
解 a に対して $b = 1 + 2\mu + a$ の値と素因数分解を表示
驚いたことに b が素数の例がない.

表 12: μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 8128$

e	A, A 型解			
13	1040384	$2^{13} * 127$	1056641	prime
15	1614774272	$2^{15} * 49279$	1614790529	$11 * 59 * 2488121$
19	541232463872	$2^{19} * 1032319$	541232480129	$11 * 49202952739$
21	8761999622144	$2^{21} * 4178047$	8761999638401	$167 * 193 * 271850071$

表 13: $\sigma(a) - 2a = 56$ の解,28:完全数

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$

7 $m = -994$ の スーパー完全数

2 べきの解なら A 型 完全数が対応する.
解を分類すると,
i. 2^e 正規解
ii. p(p: 素数) 解
iii. 非素数

表 14: $\sigma(a) - 2a = 56$ の解,28:完全数

a
$a = 14552 = 2^3 * 17 * 107$
$b = 14609 = [7, 2087]$
$a = 2^3 * 19 * 61$
$b = 9329 = [19, 491]$
$a = 74992 = 2^4 * 43 * 109$
$b = 75049 = [13, 23, 251]$
$a = 35019968 = 2^6 * 131 * 4177$
$b = 35020025 = [5, 5, 1400801]$
$a = 15317696 = 2^6 * 137 * 1747$
$a = 6019264 = 2^6 * 163 * 577$
$b = 6019321 = [7, 11, 78173]$
$a = 53032832 = 2^7 * 317 * 1307$
$b = 53032889 = [7, 13, 43, 13553]$
$a = 3365232128 = 2^9 * 1277 * 5147$
$b = 3365232185 = [5, 7, 673, 142867]$
$a = 26882784256 = 2^{10} * 2557 * 10267$
$b = 26882784313 = [7, 11, 17839, 19571]$
$a = 17374747648a = 2^{10} * 3691 * 4597$
$b = 17374747705 = [5, 7, 101, 149, 32987]$

第 5 列で素数になる場合 (* 印), スーパー完全数の素数解
A,D 型の解にマーク

表 15: $m=-994$ スーパー完全数

$a=primes$		$q=2a-1+m$		$b=a-994$	$b/496$
6449	6449	11903	11903	5456	11
12401	12401	23807	$7*19*179$	11408	23
15377	15377	29759	29759	14384	29
27281	27281	53567	$17*23*137$	26288	53
31249	31249	61503	$3*13*19*83$	30256	61
36209	36209	71423	$11*43*151$	35216	71
37201	37201	73407	$3*24469$	36208	73
40177	40177	79359	$3*7*3779$	39184	79
45137	45137	89279	$73*1223$	44144	89
52081	52081	103167	3^3*3821	51088	103
55057	55057	109119	$3*36373$	54064	109
57041	57041	113087	$13*8699$	56048	113
74897	74897	148799	$7*29*733$	73904	149
a 非素数		$q=2a-1+m$		$b=a-994$	$b/496$
2097152	2^{21}	4193309	4193309	2096159	4226.127016
512	2^9	29	29	-481	-0.969758065
2093	$7*13*23$	3191	3191	1100	2.217741935
7385	$5*7*211$	13775	$5^2*19*29$	6392	12.88709677
13349	$7*1907$	25703	25703	12356	24.91129032
31913	$7*47*97$	62831	$83*757$	30920	62.33870968
167297	$13*17*757$	333599	$7*47657$	166304	335.2903226
563297	$7*80471$	1125599	1125599	562304	1133.677419
1356977	$23*41*1439$	2712959	$307*8837$	1355984	2733.83871
1486265	$5*11*61*443$	2971535	$5*7*59*1439$	1485272	2994.5

表 16: $m=-994$ A 型 完全数

a	factor
14848	2^9*29
8794006355968	$2^{21}*4193309$

8 ウルトラ完全数

9 m だけ平行移動したウルトラ完全数

$a=2^e, (q=2a-1+m:$ 素数$)$ のとき, a を m だけ平行移動した狭義のウルトラ完全数という. $a=2^e$ に対して,$N=2^{e+1}-1$ とおくと, $\sigma(a)=N=2a-1=q-m$ なの

表 17: $m = -992$ 完全数

a		$b = 1 + 2 * \mu + a$	
1488	$2^4 * 3 * 31$	2481	$3 * 827$
2480	$2^4 * 5 * 31$	3473	$23 * 151$
2892 D	$2^2 * 3 * 241$	3885	$3 * 5 * 7 * 37$
3472	$2^4 * 7 * 31$	4465	$5 * 19 * 47$
5456	$2^4 * 11 * 31$	6449	$*6449$
6104 D	$2^3 * 7 * 109$	7097	$47 * 151$
6448	$2^4 * 13 * 31$	7441	$7 * 1063$
8432	$2^4 * 17 * 31$	9425	$5^2 * 13 * 29$
9424	$2^4 * 19 * 31$	10417	$11 * 947$
11408	$2^4 * 23 * 31$	12401	$*12401$
14384	$2^4 * 29 * 31$	15377	$*15377$
15872 A	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
18352	$2^4 * 31 * 37$	19345	$5 * 53 * 73$
20336	$2^4 * 31 * 41$	21329	$7 * 11 * 277$
21328	$2^4 * 31 * 43$	22321	$13 * 17 * 101$
23312	$2^4 * 31 * 47$	24305	$5 * 4861$
26288	$2^4 * 31 * 53$	27281	$*27281$
29264	$2^4 * 31 * 59$	30257	$79 * 383$
30256	$2^4 * 31 * 61$	31249	$*31249$
33232	$2^4 * 31 * 67$	34225	$5^2 * 37^2$
35216	$2^4 * 31 * 71$	36209	$*36209$
36208	$2^4 * 31 * 73$	37201	$*37201$
39184	$2^4 * 31 * 79$	40177	$*40177$
41168	$2^4 * 31 * 83$	42161	$7 * 19 * 317$

で $q = \sigma(a) + m$.

$\sigma(q) = q + 1$ によって $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$, $q + 1 = 2a + m$.

$$\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

$\sigma(2a) = 4a - 1, 2a = \sigma(\sigma(a) + m) - m$ なので

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1.$$

a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数という.

定義 2 $\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1$ となる式を, a を未知数と考えこの式を m だけ平行移動したウルトラ完全数の方程式, この解 a を m だけ平行移動したウルトラ完全数

表 18: $m = -992$ 完全数

a		$b = 1 + 2 * \mu + a$	
44144	$2^4 * 31 * 89$	45137	$*45137$
48112	$2^4 * 31 * 97$	49105	$5 * 7 * 23 * 61$
50096	$2^4 * 31 * 101$	51089	$47 * 1087$
51088	$2^4 * 31 * 103$	52081	$*52081$
53072	$2^4 * 31 * 107$	54065	$5 * 11 * 983$
54064	$2^4 * 31 * 109$	55057	$*55057$
56048	$2^4 * 31 * 113$	57041	$*57041$
62992	$2^4 * 31 * 127$	63985	$5 * 67 * 191$
64976	$2^4 * 31 * 131$	65969	$41 * 1609$
67952	$2^4 * 31 * 137$	68945	$5 * 13789$
68944	$2^4 * 31 * 139$	69937	$7 * 97 * 103$
73904	$2^4 * 31 * 149$	74897	$*74897$

という.

この式は複雑なので変数を増やして連立方程式に直す.

$$\sigma(\sigma(\sigma(a) + m) - m) = 4a - 1.$$

$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - m$, $\sigma(B) = 4a - 1$

この形の解 a を平行移動 m のウルトラ完全数という. $m = 0$ なら $\sigma^3(a) = 4a - 1$ になりこれが高橋のウルトラ完全数の定義式である.

10 ウルトラ完全数 II 型

平行移動 m のウルトラ完全数の定義を変更して次の式を考えてみた.

$A = \sigma(a) + m$, $B = \sigma(A) - 1$, $\sigma(B) = 2a + m$.

この式を満たす a を平行移動 m のウルトラ完全数 II 型という.

区別のために前の式をウルトラ完全数 I 型という. また高橋型のウルトラ完全数とも言う.

ウルトラ完全数 II 型はニュータイプのウルトラ完全数ともいう.

ウルトラ完全数 II 型 1 では $m = -28, -18, -14, -58$ のとき解からウルトラ三子素数が出てくる. 詳細はいずれ発表されるがここでは 1 例だけ挙げる.

表 19: $m = -18$ ウルトラ完全数 ニュータイプ

a	$factor$	$p = a/3$	$q = 2p - 7$	$r = 6p - 19$	$r + 1$	$2a + m$
15	$3 * 5$	5	3	11	12	15
16	2^4	5.333333333	3.666666667	13	14	16
21	$3 * 7$	7	7	23	24	21
29	29	9.666666667	12.33333333	39	40	29
39	$3 * 13$	13	19	59	60	39
64	2^6	21.33333333	35.66666667	109	110	64
129	$3 * 43$	43	79	239	240	129
201	$3 * 67$	67	127	383	384	201
219	$3 * 73$	73	139	419	420	219
309	$3 * 103$	103	199	599	600	309
669	$3 * 223$	223	439	1319	1320	669
729	3^6	243	479	1439	1440	729
921	$3 * 307$	307	607	1823	1824	921
1024	2^{10}	341.3333333	675.6666667	2029	2030	1024
1299	$3 * 433$	433	859	2579	2580	1299
1461	$3 * 487$	487	967	2903	2904	1461
1569	$3 * 523$	523	1039	3119	3120	1569
2361	$3 * 787$	787	1567	4703	4704	2361
2559	$3 * 853$	853	1699	5099	5100	2559
2649	$3 * 883$	883	1759	5279	5280	2649
3369	$3 * 1123$	1123	2239	6719	6720	3369
4341	$3 * 1447$	1447	2887	8663	8664	4341
4629	$3 * 1543$	1543	3079	9239	9240	4629
4971	$3 * 1657$	1657	3307	9923	9924	4971
5259	$3 * 1753$	1753	3499	10499	10500	5259
5961	$3 * 1987$	1987	3967	11903	11904	5961
6249	$3 * 2083$	2083	4159	12479	12480	6249
6339	$3 * 2113$	2113	4219	12659	12660	6339
7851	$3 * 2617$	2617	5227	15683	15684	7851

定理 1 $m = -18$ のとき, $p, q = 2p - 7, r = 6p - 19$ がすべて素数なら $a = 3p$ はニュータイプのウルトラ完全数になる.

Proof
$m = -18, a = 3p$ を代入すると,
$A = \sigma(a) + m = 4p + 4 - 18 = 4p - 14 = 2q, q = 2p - 7$. q: 素数と仮定すると,
$r = B = \sigma(A) - 1 = 3q + 2 = 3(2p - 7) + 2 = 6p - 19$. r: 素数と仮定すると,
$\sigma(B) = 6p - 18 = 2a + m$

End

さらにこの逆が成り立つ.

命題 5 p : 素数, $a = 3p$, $A = \sigma(a) + m = 2q, q = 2p - 7$. として $B = \sigma(A) - 1, \sigma(B) = 6p - 18 = 2a + m$ を仮定すると, q, r はともに素数.

Proof.

$$\sigma(B) = 6p - 18 \geq B + 1 = \sigma(A) \geq A + 1.$$

$A = \sigma(a) + m = 2q$ により, $\sigma(A) = \sigma(2q) = 3\sigma(q) \geq 3q + 3 = 3(2p - 6)$.
$\sigma(B) = 6p - 18$ により, $\sigma(B) = 6p - 18 \geq B + 1 = \sigma(A) \geq 3(2p - 6)$.
$\sigma(B) = 3(2p - 6)$ によりすべて等号が成り立ち, 結果として. q, r はともに素数.

End

ウルトラ三つ子素数とニュータイプのウルトラ完全数の関係がこのように成立した.

この結果は大きな勝利とも言える. 発見の端緒は 2018 年 7 月 2 日新宿の大学病院の地下の放射線治療室の前のベンチで得られその後都立多摩図書館で一応のまとまった結果が得られた.

このように研究を活発に行った動機は, スーパー双子素数, ウルトラ三つ子素数の予想を応援することにあった.

11　数学屋としての回顧 2

12　種数の定義

種数の定義は簡単で 1 次独立な正則微分形式の個数のことである.

正則微分形式は局所座標で $\varphi(z_j)dz_j$ ($\varphi(z_j)$：正則関数) と書けることが定義である.

4 年生になるのでゼミの先生を決めねばならない. 私は狭心症で休んでいたため学生がいなかったという河田敬義先生（代数の講義をきいていた）に指導教官をお願いし, 新しい代数幾何をやりたい、と希望を述べた。

先生は快く引き受けてくださり

スキームの理論の解説をした Dieudonne 教授の英文の講義録 (100 ページほど) をテキストにしましょう。

とのことで青焼きのコピーを作るところからはじめた.

スキームの理論は A.Grothendieck の創始になる膨大な理論である.

それをきちんと本にしたのは Dieudonne 教授で、フランス語の書

Éléments de géométrie algébrique (EGA)

に結実した.

EGA は章別の本として出版されていた. 最初の 2 冊は EGAI,EGAII で, 1 章と 2 章がそれぞれあてられていたが 3 章は 2 冊に分けて出された. IIIa,III b である. 次の第 4 章は IV-1,IV-2,IV-3,IV-4 と 4 分冊にわかれそれぞれ 300 ページあり,4 章までで合計 1500 ページ超。

13 章まで (ユークリッドの数学原論も 13 章あるから) 書く予定だそうで いつ本ができるかだれも分からないという大変なものであった。

III b まではまじめに読んだが第 4 章を構成する 4 冊は複写して揃えるだけでも大変だった. 半ばまでがんばったが結局ギブアップした。これでは勉強だけで自分の数学ができず人生が学習だけで終わってしまうと思ったからである。

Grothendieck にあこがれてスキーム論を勉強したがついていけない. かくして挫折した.

12.1　自主ゼミ

先輩の河井壮一さんが呼びかけて一緒になにか読もうと言うことになり立教大学に行って永田先生の可換環論 (local rings) の輪講をした。

河井壮一先輩は天才肌の人で、批評精神がすこぶる旺盛な人だった。ずいぶん影響をうけたものである。

くだらない論文を書くな。

つまらない論文を読むな。

読むに耐えるいい論文は小平さんの、compact surfaces だ。

2次元は小平さんによってだいたい出来たからこれからは3次元をやるんだ。
などと言われ大いに刺激を受けた。

当時、新進気鋭の若手、久賀道郎先生がさっそうと現れアーベル多様体の族の研究などを話してくれた。
歩きながら、
「ところで君、ファルマーの問題を知っているだろう。その多項式版、すなわち $n \geq 3$ のとき多項式の解は無いということが証明できるのだ。」
私は問題を理解すると直ちに天啓のようにひらめきがあり、
「種数でできる」
と答えた。
「$n \geq 3$ なら種数公式で $g > 0$ ですから、有理式では解がありません。」

久賀先生は
「それでもいいが、式の計算してもできるよ。」
と言われた。
その解答は、私が共立出版から出した「環論、これはおもしろい」に詳しく書いてある。種数がいかに偉大なものかをあらためて意識した。

12.2 代数曲線の場合

代数曲線の場合は種数 g が最も大切であって, これによってその基本性質がわかる.

- とくに, 有理曲線なら $g = 0$.
- 逆に $g = 0$ なら有理曲線になる.
- 次に複雑な曲線は楕円曲線でこれは $g = 1$ で特徴付けられる.
- $g \geq 2$ ならさらに複雑だがこれらは保型関数で一意化されるという共通性質がある.

12.3 代数曲面の場合

それでは代数曲面の場合はどうだろうか. 種数もいろいろで
幾何種数 p_g 算術種数 p_a, さらに線形種数 p_l などがある.
有理曲面なら p_g 算術種数 p_a は0になるが, これらが0でも有理曲面になるわけではない.

さらに複雑な 2 種数 P_2 があり, 有理曲面になる必要十分条件は $P_2 = p_a = 0$.
このとき $p_g = 0$ になる.
有理曲面と線織面を除外すると極小モデルになる。

代数曲面では極小モデル理論ができて美しい理論が成立する.

12.4 ザリスキーの極小モデル理論

極小モデル理論を再構成したが, ザリスキーで戦後日本を訪れ、京大などで講義をし日本数学会のモノグラフの1つ『極小モデル理論』として出版されていた.

新しいスキーム論に比べると古色蒼然としているが、がんばって読んだ。
計算が多く、場合分けも複雑で得られた、カステルヌオヴォとザリスキーの有理性判定定理の鮮やかさに比してなんとも泥臭く美しい証明とは言えない。

修士に入った頃、河田先生が
「ソ連からシャファレヴィッチ, モイシェゾンらによる代数曲面のセミナーのノートが出ている」
と言われた。
「ロシヤ語だが、英訳がある。ただし訳者は数学が分からない人だ」

これは難読のセミナー集だったが、計算が多くスキーム理論と違い数学の実質が出ていて興味深かった。

代数曲面 S について m 種数 P_m がありそれから不変量 κ がでてきた。

参考文献

[1] 高木貞治, 初等整数論講義第 2 版, 共立出版社,1971.

[2] C.F.Gauss(カール・フリードリヒ ガウス), ガウス 整数論 (数学史叢書)(高瀬正仁訳), 共立出版社, 1995.

[3] 飯高茂 , (雑誌の連載) 数学の研究をはじめよう , 現代数学社 ,2013 ～ .

[4] 飯高茂 , 『数学の研究をはじめよう (I),(II)』, 現代数学社 ,2016.

[5] 飯高茂 ,『 数学の研究をはじめよう (III),(IV)』, 現代数学社 ,2017.

[6] D.Suryanarayana, Super Perfect Numbers. Elem. Math. 24, 16-17, 1969.

[7] Antal Bege and Kinga Fogarasi,Generalized perfect numbers,Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 1, 1 (2009) 73–82.

[8] Farideh Firoozbakht and Maximilian F.Hasler, Variations on Euclid's formula for perfect numbers, J. of integer sequences, vol.13 (2010) article 10.3.1