究極の完全数と超完全数 中編
弱完全数の計算

飯高 茂

1　究極の完全数

自然数 a についてその約数の和を $\sigma(a)$ であらわす.

P を素数とし, 整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を m だけ平行移動した (平行移動 m, ともいう) 底 P の狭義の究極の完全数と呼ぶ. これは次式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1). \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

定義 1 $\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+(P-2)$ を満たす α を底 P の広義の超完全数 *(hyperperfect number)* という.

$\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+(P-2)$ の解 α は正規形と仮定する.
$\alpha=P^fr$(r:素数) となるので,$W=P^{f+1}-1$ とおくと
$\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1), P\alpha=(W+1)r$.

定義 2 $r=P^{f+1}-P+1$ が素数のとき $\alpha=P^fr$ を狭義の超完全数という.

1.1　平行移動した超完全数

底が素数 P , 平行移動 m の狭義の超完全数の定義:

$r=P^{f+1}-P+1+m$ が素数のとき,$\alpha=P^fr$ は平行移動 m の完全数の一般化であり, これを底が素数 P , 平行移動 m の狭義の超完全数という.

次にこの方程式を求める. $W=P^{f+1}-1$ とおく. 定義により $r=P^{f+1}-P+1+m=W-P+m+2$.

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=\overline{P}\sigma(P^fr)=W(r+1)=Wr+W.$$

$Wr=(P^{f+1}-1)r=P\alpha-r$ により

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=Wr+W=P\alpha-r+W.$$

$r=W-P+m+2$ により $W-r=P-2-m$ なので次の方程式をえる:

$$\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2-m.$$

この解を底が素数 P , 平行移動 m の広義の超完全数という.
究極の完全数と異なり $\mathrm{Maxp}(\alpha)$ が消えている点に注意したい.

1.2 計算例

$P=3$ のとき方程式は

$$2\sigma(\alpha)=3\alpha+1-m.$$

表 1: $P=3, m=0$; 広義の超完全数

f	f mod 4	a	factor
1	1	21	$3*7$
3	3	2133	3^3*79
4	0	19521	3^4*241
5	1	176661	3^5*727

$m=0$ の例では正規形 $(3^e q, q:$ 素数$)$ の解ばかりである. これはすごいことであり, 超完全数を名乗る資格がある.
$m=0$ のとき,$r=3^{f+1}-2, \alpha=3^f r.$
$3^2=9\equiv -1,$ mod10 により 指数部分は 4 を法とする.

究極の完全数の場合は $m=0$ の例でもいささか問題がある.

表 2: $P=3, m=0$; 究極の完全数

a	factor
4	2^2
117	3^2*13
796797	3^6*1093
1212741	3^2*47^2*61

$a=4=2^2$, $a=1212741=3^2*47^2*61$ は美しくない解である. (非正規解がすぐ出たのがよくない)

1.3 C 型解

表 3: $P=3, m=2$; 広義の超完全数

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7

これは C 型解と言ってよい.

$P=3, m=2$ のとき, 超完全数の方程式 $\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+P-2-m$ 次の形になる.

$$2\sigma(\alpha)=3\alpha-1.$$

これは劣完全数で $P=3, m=1$ の場合になり, この場合の解は概完全数と呼ばれるが $a=3^e$ しか今のところ見当たらない. これも未解決. 現在の数学が力及ばず解けないまま残っている難問と言ってよい.

1.4 A 型解

A 型解を求めるには m に対して $q=3^{e+1}-2+m$ が素数になる e を計算機で求めればよい.

表 4: $P = 3, m = 0$; 超完全数の正規解

a	factor
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$
129127041	$3^8 * 19681$
328256967373616371221	$3^{21} * 31381059607$

a の末尾 1 桁は 1 または 3.

表 5: $P = 3, m = 6$; 超完全数の正規解

a	factor
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$
129166407	$3^8 * 19687$
1162340199	$3^9 * 59053$
328256967436378490439	$3^{21} * 31381059613$
14130386091739009026274270599	$3^{29} * 205891132094653$

a の末尾 1 桁は 9.

1.5 $P = 3, m = 6, 10$ のときの広義の超完全数

表 6: $P = 3, m = 6$; 広義の超完全数

a	factor
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
178119	$3^5 * 733$

表 7: $P = 3, m = 10$; 広義の超完全数

a	factor
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
103683	$3 * 17 * 19 * 107$

表 8: $P = 3, m = 14$;

a	factor
25	5^2

これだけ見ると $a = 25 = 5^2$ が単独解のようだ. しかし大きな D 型解があることが後に明かされる.

1.6　D 型解

初めて D 型の広義の超完全数, すなわち D 型解 $a = 6864 = 3^2 * 29 * 263$ が出現したのでこれを調べよう.

$2\sigma(a) = 3a + 1 - m$ に D 型解 $a = 3^e rq, (2 < r < q :$ 素数$),$　があると仮定する.

$N = 3^{e+1} - 1, \widetilde{r} = r + 1, \widetilde{q} = q + 1, A = \widetilde{r}\widetilde{q}, B = rq, \Delta = r + q$ を使うと式の整理がうまくできて

$$2\sigma(a) = NA = N(B + \Delta + 1), 3a + 1 - m = (N + 1)B + 1 - m.$$

これより

$$2\sigma(a) = N(B+\Delta+1) = NB+N\Delta+N = (N+1)B+1-m = NB+B+1-m.$$

よって, $B - N\Delta = N + m - 1.$

$r_0 = r - N, q_0 = q - N, B_0 = r_0 q_0$ とおくとき $B_0 = r_0 q_0 = B - \Delta N + N^2.$

以上の式によって

$$B_0 = B - \Delta N + N^2 = N + m - 1 + N^2.$$

$D = N^2 + N + m - 1$ と定義する.

そこで, 話を次のように進める. $e > 0$ を 1 つ決めて $N = 3^{e+1} - 1$ を計算し, $D = N^2 + N + m - 1$ を次のように積に分解する. $r_0 q_0 = D.$ $r = r_0 + N, q = q_0 + N$ ともに素数なら, 解 $a = 3^e rq$ をえる.

1.7　計算例

$m = 4$ で $D = 705 = 3 * 5 * 47.$

$e = 2$ のとき, $a = 46593 = 3^2 * 31 * 167$,$a = 26937 = 3^2 * 41 * 73$

$m = 5$ で $D = 530715 = 3 * 5 * 35381.$

$e = 5$ のとき, $a = 19035755649 = 3^5 * 733 * 106871$,$a = 6519443841 = 3^5 * 743 * 36109.$

$m = 10$ で $e = 2$ のとき $D = 711 = 3^2 * 79$ で

$a = 68643 = 3^2 * 29 * 263$ が解.

$e=3$ のとき $D=6489=3^2*7*103$ で
$a=5026563==3^3*83*2243$, $a=3^3*101*389$ となり解が 2 個.

$m=14$ で $D=58819=131*449$.
$e=4$ のとき $a=20877183=3^4*373*691$ が解.

$m=16$ で解を探してみた.
$e=1$ のとき $D=87=3*29$.
$a=1221=3^1*11*37$ が解.

1.8 B 型解

$m=-5$ のとき定義式は $2\sigma(a)=3a+6$. 次の計算結果によると $a=8, a=2p(p\neq 2,$ 素数$)$, は解でありこの他にない.

表 9: $P=3, m=-5$;

a	factor	$\sigma(a)$
6	$2*3$	12
8	2^3	15
10	$2*5$	18
14	$2*7$	24
22	$2*11$	36
26	$2*13$	42
34	$2*17$	54
38	$2*19$	60
46	$2*23$	72
58	$2*29$	90

命題 1 $2\sigma(a)=3a+6$ の解が $a=2^eL(L:$奇数$)$, となるとする. $e=1$, $L:$素数 .

$N=2^{e+1}-1$ とおくと,
$2\sigma(a)=2N\sigma(L)$, $3a+6=3*2^eL+6$ によって,

$$2N\sigma(L)=3*2^eL+6.$$

2 倍すると
$$4N\sigma(L)=3*2^{e+1}L+12=3(N+1)L+12.$$

1). $L=1$ のとき,
$4N=3(N+1)+12$ なので, $N=15$. よって,$e=3, a=8$. これが解.
2). $L\geq 3$ のとき,
$\sigma(L)\geq L+1$ を用いて,

$$3(N+1)L+12\geq 4N(L+1).$$

ゆえに $3L+12\geq NL+4N$. 式変形して

$$(3-N)L\geq (N-3)L+4(N-3).$$

$N\geq 3$ に注意して

$$0\geq\geq (N-3)(L+4).$$

$N=2^{e+1}-1\geq 3$ により $N=3, e=1$. $N=3, 3*2^e=6$ により

$$6\sigma(L)=6L+6.$$

$\sigma(L)=L+1$ が出るので, L : 素数.

この場合, 解が $2p$ なので,B 型解. 他に B 型解はないだろう.

2　弱超完全数

$r=P^{f+1}-P+1$ が素数のとき $a=P^f r$ を狭義の超完全数という.

少し一般化して r が素数という条件をはずした場合を含めて $a=P^f r$ を狭義の超完全数という.

$f=4,6,14$ のとき r は素数になり, a は超完全数になる. f が奇数なら $f+1$ は偶数 $2t$ となり $r=5^{f+1}-2^2$ は因数分解できる. (したがってこの場合を除外してもよい)

ここで注目することは, 弱超完全数は $f>1$ のときその下 3 桁は, 121 または 621　になっていることである. f が偶数なら 下 3 桁は 121. これこそ, $P=2$ の元祖完全数では下 1 桁は 6 または 8 になる性質の類似という意味で興味が持てる.

命題 2 $P=5$ の弱完全数の下 *3* 桁は *121.*

最初に一般論を述べる.

事実 1 $a, b>1$ を互いに素な自然数,$c=ab$ とおく. $1=ax+by$ を満たす整数 x, y を求める.$A=by, B=ax$ とおく.

与えられた自然数 r に対して $r_0\equiv r \bmod a, r_1\equiv r \bmod b$ を満たす r_0, r_1 をとる. $C=Ar_0+Br_1$ とすれば, $C\equiv r \bmod c$.

表 10: $P = 5, m = 0$; 弱超完全数

f	a	factor	prime or
1	21	$3 * 7$	
2	121	11^2	
3	621	$3^3 * 23$	
4	3121	3121	prime
5	15621	$3 * 41 * 127$	
6	78121	78121	prime
7	390621	$3 * 7 * 11 * 19 * 89$	
8	1953121	$29 * 67349$	
9	9765621	$3^2 * 53 * 59 * 347$	
10	48828121	$61 * 709 * 1129$	
11	244140621	$3 * 17 * 919 * 5209$	
12	1220703121	$11 * 110973011$	
13	61035156211	$3 * 7 * 11161 * 26041$	
14	30517578121	30517578121	prime

2.1 計算

$a = 125, b = 8, c = 1000$. 互除法により $ax + by = 1$ となる x, y は $x = -3, y = 47$. よって, $A = 376, B = 375$.

$r = 5^{f+1} - 4$ に対して, f が偶数, $f = 2g$ のあるとき $r = 5^{2g+1} - 4 \equiv 121 \bmod 125, r = 5^{2g+1} - 4 \equiv 1 \bmod 8$.

$$C = Ar_1 + Br_2 = 376 * 121 - 375 = 45121 \equiv 121 \bmod 1000.$$

f が奇数なら $C \equiv 621 \bmod 1000$ も示される.