3 項完全数の展開
中編 6素数の奇跡

飯高 茂

平成 31 年 8 月 19 日

1　3 項完全数の導入

与えられた e, m に対して, $q = 2^{e+1} - 1 + m$ は素数と仮定する.
$\alpha' = 2^e q$ は $\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満たし, 平行移動 m の狭義の 完全数と呼ばれる.
それに対して,$\sigma(\alpha') = 2\alpha' - m$ を満た数 α' を平行移動 m の広義の完全数というが略して単に平行移動 m の完全数ともいう.
さて, $\alpha = 2^{e+1}q$ は 完全数の 2 倍だが どんな方程式を満たすことになるだろうか.
$N_0 = 2^{e+2} - 1$ とおくとき, $q = 2^{e+1} - 1 + m = \dfrac{N_0 - 1}{2} + m$. よって $N_0 = 2(q - m) + 1$.
$\sigma(\alpha) = N_0 * (q + 1) = N_0 q + N_0 = 2\alpha - q + N_0 = 2\alpha - q + 2(q - m) + 1$ を満たす.
よって $\sigma(\alpha) = 2\alpha + q + 1 - 2m$.
これだけでは先へ進まないので,
$2\varphi(\alpha) = 2^{e+1}(q - 1) = \alpha - 2^{e+1} = \alpha - q + m - 1$ を用いて $\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) = 3\alpha - m$.
さて $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a$ を用いると $\Psi_{2,3}(\alpha) = \sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -m$ となる.

定義 1 与えられた m に対して,$\Psi_{2,3}(a) = -m$ を満たすとき, a を平行移動 m の *(2,3)* 型 *3* 項完全数という.

1.1　例

$a = p$ が素数の場合は $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = p + 1 + 2(p - 1) - 3p = -1$ になるので素数 p は 平行移動 1 の (2,3) 型 3 項完全数になる.
素数べきの場合, $a = p^e$ なら $\overline{p} = p - 1$ を用いると

$$\overline{p}\Psi_{2,3}(p^e) = (p^{e+1} - 1) + 2p^{e-1}(p - 1)^2 - 3p^e(p - 1) = (2 - p)p^{e-1} - 1 = (1 - p)p^{e-1} - 1 + p^{e-1}.$$

とくに $p = 2$ のとき, $\Psi_{2,3}(2^e) = -2^{e-1} + \sigma(2^{e-2}) = -1$.
とくにe=2のとき, $\Psi_{2,3}(p^2) = -p + 1$. p=3 のとき $\Psi_{2,3}(3^2) = -2$.

一般には $\overline{p}\Psi_{2,3}(p^e) = (1-p)p^{e-1} + p^{e-1} - 1 = -\overline{p}p^{e-1} + \overline{p}\sigma(p^{e-2})$ になるので

$$\Psi_{2,3}(p^e) = -p^{e-1} + \sigma(p^{e-2}).$$

a が素数 p, また は 2^e なら　$\Psi_{2,3}(\mathrm{a}) = -1$.

これは注目すべき結果であるが, この逆は, $\Psi_{2,3}(\mathrm{a}) = -1$ なら a が素数, また は 2^e となる.

これが成立するかどうかはわからない. 大難問と言えるだろう.

$a = pq$, (p, q が相異なる素数) の場合は $B = pq, \Delta = p+q$ とおけば

$\sigma(a) = B + \Delta + 1, 2\varphi(a) = 2(B - \Delta + 1), -3a = -3B$ により

$\Psi_{2,3}(pq) = B+\Delta+1+2(B-\Delta+1)-3B = 3-\Delta = -m$ とおくとき $3+m = \Delta = p+q$.

m が正の奇数なら $3+m$ は偶数で $3+m = p+q$. これは $3+m$ を 2 個の奇素数 p, q の和で表すことを意味する.

8 以上の偶数を 2 個の相異なる奇素数 p, q の和で表すことが常に可能である，というのが Goldbach の予想であり成立することは確実と思われるのだが証明ができていない.

1.2 m: 奇数の計算例

表 1: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =19	$m+3=22$
57	$3*19$
85	$5*17$
125	5^3
m =17	$m+3=20$
50	$2*5^2$
51	$3*17$
91	$7*13$

表 2: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
m =15	$m + 3 = 18$
65	$5 * 13$
77	$7 * 11$
162	$2 * 3^4$
m =13	$m + 3 = 16$
39	$3 * 13$
55	$5 * 11$
63	$3^2 * 7$
m =11	$m + 3 = 14$
33	$3 * 11$

1.3 m: 偶数の計算例

表 3: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -m$

a	素因数分解
$m = -4$	
24	$2^3 * 3$
176	$2^4 * 11$
3776	$2^6 * 59$
64256	$2^8 * 251$
220	$2^2 * 5 * 11$
40528	$2^4 * 17 * 149$
$m = -2$	
40	$2^3 * 5$
208	$2^4 * 13$
928	$2^5 * 29$
3904	$2^6 * 61$
150	$2 * 3 * 5^2$

A 型解,D 型解はそこそこあるが次に示す $m = 2$ のときの解は異常に面白い.

2 $\Psi_{2,3}(a) = -m = -2$ の解

ただし $a < 10^6$ の範囲に限って計算し. 解を揃え直してみた.

表 4: $\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
30	$2 * 3 * 5$
870	$2 * 3 * 5 * 29$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$
9	3^2
20	$2^2 * 5$ (フェルマー完全数の 2 倍)
272	$2^4 * 17$
65792	$2^8 * 257$
42961272832	$2^{16} * 655537$

第 3 ブロックの解は A 型解 $2^{e+1}q$. $q = 2^{e+1} + 1$ で q はフェルマ素数.

第 1 ブロックの解は 2 から始まり順次素数が掛けられた数が解になるというはなはだ美麗な解の構造を持っている.

この性質を利用して解の構造を究明したい.

数 α が $\Psi_{2,3}(\alpha) = -2$ を満たすとき, それと互いに素な素数 p との積 $\beta = \alpha p$ も $\Psi_{2,3}(\beta) = -2$ を満たすとする.

$$\begin{aligned}\Psi_{2,3}(\beta) &= \sigma(\beta) + 2\varphi(\beta) - 3\beta \\ &= \sigma(\alpha)(p+1) + 2\varphi(\alpha)(p-1) - 3\alpha p \\ &= (\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha)p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) \\ &= -2p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) \\ &= -2.\end{aligned}$$

ここで $\sigma(\alpha) + 2\varphi(\alpha) - 3\alpha = -2$ により $-2p + \sigma(\alpha) - 2\varphi(\alpha) = -2$.
$\sigma(\alpha) = -2\varphi(\alpha) + 3\alpha = -p$ なのでこれを代入し

$$-2p + 3\alpha - 4\varphi(\alpha) = 0.$$

関数 $f(a) = 3 * a - 4\varphi(a)$ を導入すると

$$2p = f(\alpha).$$

2.1 計算開始

$\Psi_{2,3}(a) = \sigma(a) + 2\varphi(a) - 3a = -2$ の解として $\alpha = 6$ があるのは明らかなのでからはじめる.

$\alpha = 6$ とおくとき $2p = f(6) = 3 * 6 - 4\varphi(6) = 18 - 8 = 10$. 2 で割って, $p = 5$; これは素数. よって $6 * 5$ は解.

次に $\alpha = 6 * 5$ とおく. $2p = f(30) = 3 * 30 - 4\varphi(30) = 90 - 4 * 8 = 58$. よって, $p = 29$; 素数.

$\alpha = 870 = 2 * 3 * 5 * 29$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1714 = 2 * 857$. よって, $p = 857$; これも素数.(うれしい)

$\alpha = 745590 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1469794 = 2 * 734897$. よって, $p = 734897$; 素数.

$\alpha = 547931854230 = 2*3*5*29*857*734897$ とおくとき $2p = f(\alpha) = 1080147968194 = 2 * 540073984097$.

よって, $p = 540073984097$. これが素数とは驚いた.

ついに来るときが来たらしいが同様に $\alpha = 295923739527652742180310 = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$ とおくとき

$2p = f(\alpha) = 583359816597376865405314 = 2 * 324589 * 898613040795247013$. よって, $p = 324589 * 898613040795247013$. これは素数ではない.

以上を表にまとめる.
$\alpha = f(a)$ についての表

a	素因数分解	$\varphi(a)$	α	素因数分解
6	$2 * 3$	2	10	$2 * 5$
30	$2 * 3 * 5$	8	58	$2 * 29$
870	$2 * 3 * 5 * 29$	224	1714	$2 * 857$
745590	$2 * 3 * 5 * 29 * 857$	191744	1469794	$2 * 734897$
547931854230	$2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897$	140911898624	X	Y
A	B	C	D	E

$X = 1080147968194$
$Y = 2 * 540073984097$
$A = 295923739527652742180310$
$B = 2 * 3 * 5 * 29 * 857 * 734897 * 540073984097$
$C = 76102850496395340283904$
$D = 583359816597376865405314$
$E = 2 * 324589 * 898613040795247013$
ここで解の列は終わる.

図 1: 6 素数のシンボルキャラクター); By Jun Iitaka

$m=2$ の解の表をまとめて眺めよう.

表 5: $\Psi_{2,3}(a)=\sigma(a)+2\varphi(a)-3a=-2$

a	素因数分解
6	$2*3$
30	$2*3*5$
870	$2*3*5*29$
745590	$2*3*5*29*857$
547931854230	$2*3*5*29*857*734897$
295923739527652742180310	$2*3*5*29*857*734897*540073984097$

2 に続いて特殊な意味を持つ素数が 6 個も続くのは大いなる不思議というべきである. これを 6 素数の奇跡と呼んでみたい. 3 項完全数はこのような奇妙な素数列の発見につながったのだから本質的に意義のある概念と言って良いだろう.

ここに私の生年月日である 1942 年 5 月 29 日のうちの月と日が出たことに大きな感動を覚える. これを見つけたのは 2019 年の 7 月のある日のことだが, 不慮の事故に出会うことを本気に心配した. 論文や雑誌の原稿に書かないで死ぬわけにはいかないと思ったのである.

3 フェルマ素数の積

同じように特別な素数の集合があり順次掛けるとある方程式の解になることはかつて私も経験した.

注意 1 $a=2\varphi(a)-1$ の解に *3,3*5,3*5*17,3*5*17*257,3*5*17*257*65537* とフェルマ素数の積で書けるものが 5 個あった.

$2\varphi(a)-a=1$ を満たすとき $a'=ap$ とおき ($a<p$ となる素数 p) $2\varphi(a')-a'=N$ としてみる.

$2\varphi(a')=2\varphi(a)(p-1)=a'+N$ に $2\varphi(a)=a+1$ を代入すると

$$2\varphi(a')=(a+1)(p-1)=a'-a+p-1=a'+N$$

から $p=a+N+1$.

したがって解 a に $N+1$ を加えた $p=a+N+1$ が素数なら $2\varphi(a')-a'=N$ を満たす解 $a'=pa$ がえられる.

$N=1$ とする.$p=a+N+1=a+2$ なので, 解 a に対し $p=a+2$ が素数なら次なる解ができ巧くいけば次々に解がでてくる.

$2\varphi(a)-a=1$ の一番小さい解 $a=3$ からはじめる.

最後の $a=3*5*17*257*65537=4,294,967,295$ 100 万を大きく超えるので, 表には出ていない.

表 6: $2\varphi(a) - a = 1$, の解

a	$p = a + 2$	$a' = ap$
3	5	15=3*5
3*5	17	3*5*17
3*5*17	257	3*5*17*257
3*5*17*257	65537	3*5*17*257*65537

解 $a = 3 * 5 * 17 * 257 * 65537 = 4294967295$ に対して $a + 2 = 4294967297 = 641 * 67004174294967297$ は素数ではない. ここで, 系列は終了する.

$2\varphi(a) - a = 1$ 　には続きの解がある.

表 7: $2\varphi(a) - a = 1$, 表の追加

a	素因数分解
83623935	$3 * 5 * 17 * 353 * 929$
6992962672132095	$3 * 5 * 17 * 353 * 929 * 83623937$

私はこのような続きの解があることを知らされて大変驚いた.

しかし, $\Psi_{2,3}(a) = -2$ の解はこれ以上ないだろうと思っている.

意欲のある読者は新しい解を発見するか, これ以上解がないことを証明してみたらどうか.