(A,B,C) 完全数
前編 オイラー関数再訪

飯高 茂

平成 31 年 11 月 20 日

1 (A,B,C) 完全数

新しく始めた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化するとその本質が露わになることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

2 固有完全数

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a=kp$:B 型解) とする.

$$\begin{aligned}A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp\\ &= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p+A\sigma(k)-B\varphi(k)\\ &= D\end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=kp$ と書けるとき 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよびそれ以外をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すこと, これこそ基本的課題である.

一般に与えられた定数項 D に対して (A,B,C) 完全数を求めることはごく特別な場合以外は難しい.

正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

ここでは, 固有完全数が固有値にあたりと 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 (0,2,1) 完全数

$a = 2^e$ とおく. $\varphi(a) = 2\varphi(2^e) = 2 * 2^{e-1}$ を満たすので $2\varphi(a) = 2^e = a$.

これを根拠に (0,2,1) 完全数を考える.

定数項 D の (0,2,1) 完全数 の方程式は $2\varphi(a) - a = D$. $m = -D$ とおき定数 m を平行移動の定数と考える.

$2\varphi(k) - k = 0$ を満たす k が (0,2,1) 完全数の固有完全数であり, これを k_0 とおく.

$k_0 = 2^e$ となる. これが 固有完全数.

$D_0 = -2\varphi(k_0) = -2^e$ が宇宙定数項.

したがって $2\varphi(a) - a = D_0 = -2^e$ が (0,2,1) 宇宙完全数の方程式.

$a - 2\varphi(a) = 2^e$ となる. a は偶数なので, $a = 2^\eta L, (L:$ 奇数$)$ とかける.

このとき $a - 2\varphi(a) = 2^\eta(L - \varphi(L)) = 2^e$.

これより $L - \varphi(L) = 2^{e-\eta}$. L は奇数なので, $2^{e-\eta} = 1$.

よって, $e = \eta$, L は素数 p となり,(0,2,1) 宇宙完全数は $a = 2^e p, (p:$ 奇素数$)$ と書ける.

この場合は完全に解決した.

4 計算例

表 1: $2\varphi(a) - a = D$,$D = -8, -4, -2$

a	素因数分解	a	素因数分解	a	素因数分解
$D = -8$		$D = -4$		$D = -2$	
24	$2^3 * 3$	12	$2^2 * 3$	6	$2 * 3$
40	$2^3 * 5$	20	$2^2 * 5$	10	$2 * 5$
56	$2^3 * 7$	28	$2^2 * 7$	14	$2 * 7$
88	$2^3 * 11$	44	$2^2 * 11$	22	$2 * 11$
104	$2^3 * 13$	52	$2^2 * 13$	26	$2 * 13$
136	$2^3 * 17$	68	$2^2 * 17$	34	$2 * 17$
152	$2^3 * 19$	76	$2^2 * 19$	38	$2 * 19$
184	$2^3 * 23$	92	$2^2 * 23$	46	$2 * 23$
232	$2^3 * 29$	116	$2^2 * 29$	58	$2 * 29$
248	$2^3 * 31$	124	$2^2 * 31$	62	$2 * 31$
296	$2^3 * 37$	148	$2^2 * 37$	74	$2 * 37$

$D=-6$ のとき $a=18=2*3^2$

5 D :偶数

$2\varphi(a)-a=D$ は D が偶数なら上記の方法で容易に解ける.
実際,D は偶数なので $D=-2^eG,(G:$ 奇数$)$ とおく.
このとき $2\varphi(a)-a=D$ の解は偶数なので
$a=2^{\varepsilon}L,(L:$ 奇数$)$ とおくことができる.
$2\varphi(a)-a=2\varphi(2^{\varepsilon}L)-2^{\varepsilon}L=2^{\varepsilon}(\varphi(L)-L)$ なので

$$2^{\varepsilon}(\varphi(L)-L)=D=-2^eG$$

$e\geq\varepsilon$ となり, $\xi=e-\varepsilon$ とおけば,

$$2^{\varepsilon}(L-\varphi(L))=2^{\xi}G.$$

L: 奇数, $\varphi(L)$: 偶数なので, $2^{\xi}G$ は奇数. よって $\xi=0;e=\varepsilon$.
したがって, $a=2^eL, L-\varphi(L)=G$.
$co\varphi(L)=L-\varphi(L)$ をオイラー余関数という. これを使えば $co\varphi(L)=G$. この逆関数があれば G から L が決定できる.
例. $L=pq(p,q$:異なる素数$)$ のとき, $\varphi(L)=pq-(p+q)+1=L-(p+q)+1$
これより,$p+q=co\varphi(L)+1=G+1$.
$G+1$ は偶数である. $G+1<8$ なら $G=1,3,5$ しかないからこの場合は $D=2^e,2^e3,2^e5$ だけ. したがって簡単にわかる.
$G+1\geq 8$ とする.
ゴールドバッハの予想 が 正しいなら 8 以上の偶数は 異なる 2 つの奇素数 q_1,q_2 の和として書ける. このとき $L=q_1q_2$ とおけば $a=2^eL$ は $2\varphi(a)-a=D$ を満たす.
実際にはゴールドバッハの予想で作られる解は非常に多い.

表 2: $2\varphi(a) - a = D =$,$D = -14$

a	素因数分解
$D = -14$	
30	$2 * 3 * 5$
98	$2 * 7^2$
$D = -12$	
36	$2^2 * 3^2$
$D = -10$	
50	$2 * 5^2$
$D = -8$	
24	$2^3 * 3$
40	$2^3 * 5$
56	$2^3 * 7$
88	$2^3 * 11$
104	$2^3 * 13$
136	$2^3 * 17$
152	$2^3 * 19$
184	$2^3 * 23$
232	$2^3 * 29$
248	$2^3 * 31$
296	$2^3 * 37$
328	$2^3 * 41$

表 3: $2\varphi(a) - a = D = -m, m = 2$

a	素因数分解
6	$2 * 3$
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$
38	$2 * 19$
46	$2 * 23$

6 D :奇数

D が奇数の場合は一般的解決はきわめて困難である.

例として $D = 1$ の場合を取り上げる. $2\varphi(a) - a = D = 1, (m = -1, D = 1)$ の解はフェルマ素数の積という著しい特色を持っている.

たまたま見ていたテレビ番組で, 自然石を使って石垣を組み立てる伝統の技を見ることができた. フェルマ素数が積み上げられた表を見た私は素数の作る石垣を連想した.

表 4: $2\varphi(a) - a = D = -m, m = -1, D = 1$

a	素因数分解
3	3
15	$3 * 5$
255	$3 * 5 * 17$
65535	$3 * 5 * 17 * 257$
4294967295	$3 * 5 * 17 * 257 * 65537$

これは 5 段の素数石垣と呼ぶことができる.

フェルマ素数の積が出てくる理由を考えてみよう.

$2\varphi(a)-a=1$ を満たす解, と互いに素な素数 p の積 $a'=ap$ として次の解 a' が出来ているとする.

$2\varphi(a')-a'=1$ を満たすので $2\varphi(a')=2\varphi(a)(p-1)$ により

$$\begin{aligned}1 &= 2\varphi(a')-a' \\ &= 2\varphi(a)(p-1)-ap \\ &= (2\varphi(a)-a)p-2\varphi(a) \\ &= p-2\varphi(a)\end{aligned}$$

故に $p=1+2\varphi(a)$.

$2\varphi(a)-a=1$ を満たすので, $p=1+2\varphi(a)=a+2$.

$a=3$ から始めると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2=5$. これは素数. したがって $a=3*5$ が次の解.

$a=3*5$ とすると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2*4=17$. これは素数. $a=3*5*17$ が次の解.

$a=3*5*17$ とすると, $p=1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16=257$. これは素数. $a=3*5*17*257$ が次の解.

$a=3*5*17*257$ とすると, $1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16*256=65537$. これは素数. $a=3*5*17*257*65537$ が次の解. これは素数ではない.

$a=3*5*17*257*65537$ とすると, $1+2\varphi(a)=1+2*2*4*16*256*65536=4294967297=641*6700417$ と素因数分解されるので, これは素数ではない.

表 5: $2\varphi(a)-a=D=3$

a	素因数分解
5	5
9	3^2
21	$3*7$
285	$3*5*19$
27645	$3*5*19*97$
45	3^2*5
765	3^2*5*17
196605	$3^2*5*17*257$
12884901885	$3^2*5*17*257*65537$

ここでは解の素因数分解にしたがって, 解を分類する.

1) $a = Q^e$ 素数のべき.
$\varphi(a) = \varphi(Q^e) = \overline{Q}Q^{e-1}$ なので

$$3 = 2\varphi(a) - a = 2\overline{Q}Q^{e-1} - Q^e = Q^{e-1}(2\overline{Q} - Q) = Q^{e-1}(Q-2)$$

i.$e = 1$ なら $3 = Q - 2$ より $a = Q = 5$.
ii. $e > 1$ なら $3 = Q^{e-1}(Q-2)$ より $Q = 3, e-1 = 1; a = 3^2$.

$2\varphi(a) - a = -m_1$ を満たす解 a と互いに素な素数 p の積 $a' = ap$ が $2\varphi(a') - a' = -m_2$ を満たすとする.

$$\begin{aligned} -m_2 &= 2\varphi(a') - a' \\ &= 2\varphi(a)(p-1) - ap \\ &= (2\varphi(a) - a)p - 2\varphi(a) \\ &= -pm_1 - 2\varphi(a) \end{aligned}$$

故に

$$-m_2 = -pm_1 - 2\varphi(a).$$

$2\varphi(a) - a = -m_1$ により,

$$m_2 = pm_1 + 2\varphi(a) = pm_1 + (a - m_1) = a + (p-1)m_1.$$

$a = 3, m_1 = -1, m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = a - (p-1) = 4 - p; p = 7$.
$a = 3*5 = 15, m_1 = -1, m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 15 - (p-1) = 16 - p; p = 19$. よって, $a' = 3*5*19$.
$a = 3*5*19 = 285, m_1 = m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 3*5*19 + 3(p-1); p = 96 + 1 = 97$; 素数. よって, $a' = 3*5*19*97$.
$a = 3*5*19*97, m_1 = m_2 = -3$ とすると, $-3 = m_2 = 3*5*19*97 - (p-1)3; p = 3*5*19*97 + 1 = 67*139$; 非素数.

表 6: $2\varphi(a) - a = D = -m, m = -5$

a	素因数分解
7	7
75	$3 * 5^2$
1275	$3 * 5^2 * 17$
327675	$3 * 5^2 * 17 * 257$
	$3 * 5^2 * 17 * 257 * 65537$

$2\varphi(a) - a = 1$ を満たす解 a が 5 の倍数なら $b = 5a$ は $2\varphi(b) - b = 5$.
したがって $3 * 5^2 * 17 * 257 * 65537$ も $2\varphi(b) - b = 5$ の解になる.

7　(0,3,2) 宇宙完全数

$a = 3^e$ とおく. $\varphi(a) = \varphi(3^e) = 2 * 3^{e-1}$ なので, $3\varphi(a) = 2 * 3^e = 2a$.

これにより,(0,3,2) 完全数を考える.
固有完全数の方程式は $3\varphi(k) = 2k$.
この解は 3 の倍数になろので $k = 3^e L, ((3, L)$: 互いに素) と書ける.

$$3\varphi(k) - 2k = 2 * 3^e \varphi(L) - 2 * 3^e L = -2 * 3^e (co\varphi(L)).$$

$3\varphi(k) - 2k = 0$ により, $co\varphi(L) = 0.L = 1$ が導かれる. よって, $k_0 = 3^e$ が 固有完全数.

次に宇宙定数項 D_0 を求める.
宇宙定数項 $D_0 = 2k_0 - 6\varphi(k_0) = 2k_0 - 4(k_0) = -2k_0 = -2 * 3^e$.
(0,3,2) 宇宙完全数の方程式は次の通り.

$$3\varphi(a) - 2a = D_0 = -2k_0 = -2 * 3^e.$$

これより a は 3 の倍数になり $a = 3^f L, ((3, L)$: 互いに素) と書けるので

$$-2 * 3^e = 3\varphi(a) - 2a = 3\varphi(3^f L) - 2 * 3^f L = 2 * 3^f (\varphi(L) - L).$$

よって, $-3^e = 3^f (\varphi(L) - L).co\varphi(L) = L - \varphi(L)$ と書くとき

$$3^{e-f} = co\varphi(L).$$

i. $f = e$ なら $-1 = \varphi(L) - L$. L は素数 なので, q とおくとき ,$a = 3^e L = 3^e q$.

ii. $f < e$ なら $\xi = e - f$ とおくとき $3^\xi = co\varphi(L)$ を満たす 3 で割れない L を探すことが問題となる.

L は 3 で割れないであって, $3^\xi = co\varphi(L)$ を満たすので, 平方因子を持たない. $L = p_1 p_2$ と異なる奇素数の積と仮定すると,
$co\varphi(L) = p_1 + p_2 - 1$. よって $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi$. $\xi \geq 3$ なら偶数 $1 + 3^\xi \geq 28$ なので 有名なゴールドバッハ予想より 2 奇素数の和 $p_1 + p_2$ で書けると思われる.
$3^e q$ の解は通常解:　それ以外は天与の解.
$D = -2 * 3^4, e = 4$ のときは, $f = 1$ なら, $\xi = e - f = 3$, $3^\xi = 27 = co\varphi(L)$.
ここで, $L = p_1 p_2$ とおけば $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi = 1 + 27 = 28$.
p_1, p_2 は 3 以外の素数なので, $(p_1, p_2) = (5, 23), (11, 17)$.

$D = -2 * 3^4, e = 5$ のときは, $f = 1$ なら, $\xi = e - f = 4$, $3^\xi = 81 = co\varphi(L)$.
$L = p_1 p_2$ とおけば $p_1 + p_2 = 1 + 3^\xi = 1 + 81 = 82$.
p_1, p_2 は 3 以外の素数なので, $(p_1, p_2) = (23, 59), (11, 71)$.

表 7: $3\varphi(a) - 2a = D$

$D = -2 * 3^4$	$e = 4$	$D = -2 * 3^5$	$e = 5$	$D = -2 * 3^6$	$e = 6$
a	素因数分解	a	素因数分解	a	素因数分解
162	$2 * 3^4$	486	$2 * 3^5$	1458	$2 * 3^6$
345	$3 * 5 * 23$	1035	$3^2 * 5 * 23$	3105	$3^3 * 5 * 23$
405	$3^4 * 5$	1215	$3^5 * 5$	3585	$3 * 5 * 239$
561	$3 * 11 * 17$	1683	$3^2 * 11 * 17$	3645	$3^6 * 5$
567	$3^4 * 7$	1701	$3^5 * 7$	5049	$3^3 * 11 * 17$
891	$3^4 * 11$	2343	$3 * 11 * 71$	5103	$3^6 * 7$
1053	$3^4 * 13$	2673	$3^5 * 11$	7029	$3^2 * 11 * 71$
1377	$3^4 * 17$	3159	$3^5 * 13$	7689	$3 * 11 * 233$
1539	$3^4 * 19$	4071	$3 * 23 * 59$	8019	$3^6 * 11$
1863	$3^4 * 23$	4131	$3^5 * 17$	9477	$3^6 * 13$