(A,B,C) 完全数
中編 2 項完全数

飯高 茂

平成 31 年 11 月 11 日

1 (A,B,C) 完全数

新しく始めた 3 項完全数の理論は意外に発展し, さらに一般化するとその本質が露わになることがわかりついに (A,B,C) 完全数という概念の導入に至った.

与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

2 固有完全数

定数 k とそれの因子にならない素数 p について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる場合の素数 p が無数にある ($a=kp$:B 型解) とする.

$$\begin{aligned}A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp\\ &= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p+A\sigma(k)-B\varphi(k)\\ &= D\end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので,

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく.

$D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

(宇宙項 と似ているのがかわいい)

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 の (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=kp$ と書けるとき 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよびそれ以外をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すこと, これこそ基本的課題である.

一般に与えられた定数項 D に対して (A,B,C) 完全数を求めることはごく特別な場合以外は難しい.

正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

ここでは, 固有完全数が固有値にあたりと 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 $(1, 0, 2)$ 完全数

$a = 2^e$ なら $\sigma(a) = 2^{e+1} - 1 = 2a - 1$ を満たす.

定数部分を 一般の定数項に入れて $\sigma(a) - 2a = D$ を ABC 完全数の式とみる.

$P = 2$ なら固有完全数の定義式は $\sigma(k) = 2k$ になり固有完全数は (元祖) 完全数になる.

固有完全数 k_0 に対して 宇宙定数項は $D_0 = 2k_0$ であって $\sigma(a) = 2a + 2k_0$ が宇宙完全数の定義式となりすべてはうまく行く.

$k_0 = 6$ のときを考えると $D_0 = 2k_0 = 12$.

$\sigma(a) = 2a + 12$ が宇宙完全数の方程式だがこれは, 古から 12 だけ過剰な過剰数と呼ばれそれなりの注目を集める存在であった.

次の数表は古代から知られていたと思われるが $6p$ 以外の値が注目された.

表 1: $\sigma(a) = 2a + 12$ の解

a	素因数分解
30	$2*3*5$
42	$2*3*7$
66	$2*3*11$
78	$2*3*13$
102	$2*3*17$
114	$2*3*19$
138	$2*3*23$
174	$2*3*29$
186	$2*3*31$
222	$2*3*37$
246	$2*3*41$
258	$2*3*43$
282	$2*3*47$
318	$2*3*53$
354	$2*3*59$
366	$2*3*61$
402	$2*3*67$
426	$2*3*71$
24	2^3*3
54	$2*3^3$
304	2^4*19

4 $(P-1,0,P)$ 完全数

$a=P^e, (P:$ 素数$)$ なら $\overline{P}=P-1$ とおくとき $\overline{P}\sigma(a)=P^{e+1}-1=Pa-1$ が成り立つ.

そこで $\overline{P}-Pa=D$ を $(P-1,0,P)$ 完全数の定義式と見なすことができる.

$P>2$ の場合は一般化された完全数になるはずである.

5 $(2,0,3)$ 完全数

$P=3$ に限って書いて見よう.

固有完全数の定義式は $2\sigma(k)=3k$ なので k は 2 の倍数になり $k=2^eM, (M$: 2 の倍数ではない$)$ と書ける.

$$0=2\sigma(k)-3k=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM.$$

$R=2^e$ とおくとき

$0=2(2^{e+1}-1)\sigma(M)-3*2^eM=2(2R-1)\sigma(M)-3RM$ なので

$$2(2R-1)\sigma(M)=3RM.$$

$$\frac{4R-2}{3R}=\frac{M}{\sigma(M)}\leq 1.$$

$4R-2\leq 3R$ により $2\leq 2^e=R\leq 2$.

ゆえに, $R=2, e=1$. よって, $\frac{M}{\sigma(M)}=\frac{4R-2}{3R}=1$. これより $M=1, k=2$.

固有完全数はただ 1 つ $k_0=2$.

$a=k_0p=2p$ が (2,0,3) 宇宙完全数の解なので $D_0=2\sigma(a)-3a=6p+6-6p=6$.

(2,0,3) 宇宙完全数の方程式は $2\sigma(a)-3a=6$. この解は $a=2p, (p:$ 奇素数$)$ に限る.

定理 1 $2\sigma(a)-3a=D=6$ のとき $a=8, a=2p$. p は奇素数.

6 数値例

表 2: $2\sigma(a) - 3a = D = -m = 6,\ P = 3$

a	素因数分解
$m = -6$	
6	$2 * 3$
8	2^3
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$
38	$2 * 19$
46	$2 * 23$
58	$2 * 29$
62	$2 * 31$
74	$2 * 37$
82	$2 * 41$
86	$2 * 43$
94	$2 * 47$
106	$2 * 53$
118	$2 * 59$
122	$2 * 61$
134	$2 * 67$
142	$2 * 71$
146	$2 * 73$
158	$2 * 79$
166	$2 * 83$
178	$2 * 89$
194	$2 * 97$

ここでは通常解しかないことが証明されている.

表 3: $2\sigma(a) - 3a = D = -m,\ P = 3$

a	素因数分解
$m = -9$	
153	$3^2 * 17$
1917	$3^3 * 71$
18873	$3^4 * 233$
957	$3 * 11 * 29$
24957	$3^2 * 47 * 59$
29637	$3^2 * 37 * 89$
67077	$3^2 * 29 * 257$
$m = -7$	
171	$3^2 * 19$
1971	$3^3 * 73$

表 4: $2\sigma(a) - 3a = D = -m, P = 3$

a	素因数分解
$m = -3$	
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
$m = -2$	
4	2^2
$m = -1$	
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$

表 5: $2\sigma(a) - 3a = D = -m,\ P = 3$

a	素因数分解
$m = 0$	
2	2
$m = 1$	
1	1
3	3
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7

$a = 3^e$ とおくとき $2\sigma(a) = 3a - 1$ となる.
この逆が大難問. $a = 3^e$ についての概完全数予想.

7 (1,0,3) 宇宙完全数

この場合 $D = \sigma(a) - 3a$ になる.
固有完全数の定義式は $\sigma(k) = 3k$ になり
その解は例えば $k_0 = 120$.
宇宙定数項 $D_0 = 3k_0 = 360$.
$\sigma(a) - 3a = D_0 = 360$ が宇宙完全数の定義式.

表 6: 3 倍完全数, 宇宙定数項 $D_0 = 360$

a	素因数分解
$D = 360$	
840	$2^3 * 3 * 5 * 7$
1320	$2^3 * 3 * 5 * 11$
1560	$2^3 * 3 * 5 * 13$
2040	$2^3 * 3 * 5 * 17$
2280	$2^3 * 3 * 5 * 19$
2760	$2^3 * 3 * 5 * 23$
3480	$2^3 * 3 * 5 * 29$
3720	$2^3 * 3 * 5 * 31$
4440	$2^3 * 3 * 5 * 37$
4920	$2^3 * 3 * 5 * 41$
5160	$2^3 * 3 * 5 * 43$
5640	$2^3 * 3 * 5 * 47$
6360	$2^3 * 3 * 5 * 53$
7080	$2^3 * 3 * 5 * 59$
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
3000	$2^3 * 3 * 5^3$
1920	$2^7 * 3 * 5$

$k_0 = 120 = 2^3 * 3 * 5$ の素数倍が通常解, それ以外は天与の解である.
ここでの天与の解はすべて擬素数として説明できる.

$k_0 = 672, D_0 = 3 * 672 = 2016$
固有完全数 $k_0 = 672$ のときの宇宙完全数は次の通り

表 7: 3 倍完全数, 定数項　$D = 2016$

a	素因数分解
$D = 2016$	
3360	$2^5 * 3 * 7 * 5$
7392	$2^5 * 3 * 7 * 11$
8736	$2^5 * 3 * 7 * 13$
11424	$2^5 * 3 * 7 * 17$
12768	$2^5 * 3 * 7 * 19$
15456	$2^5 * 3 * 7 * 23$
19488	$2^5 * 3 * 7 * 29$
20832	$2^5 * 3 * 7 * 31$
24864	$2^5 * 3 * 7 * 37$
27552	$2^5 * 3 * 7 * 41$
28896	$2^5 * 3 * 7 * 43$
31584	$2^5 * 3 * 7 * 47$
35616	$2^5 * 3 * 7 * 53$
39648	$2^5 * 3 * 7 * 59$

表 8: 3 倍完全数, 定数項　$D = 2016$

a	素因数分解
$D = 2016$	
40992	$2^5 * 3 * 7 * 61$
45024	$2^5 * 3 * 7 * 67$
47712	$2^5 * 3 * 7 * 71$
49056	$2^5 * 3 * 7 * 73$
53088	$2^5 * 3 * 7 * 79$
55776	$2^5 * 3 * 7 * 83$
59808	$2^5 * 3 * 7 * 89$
65184	$2^5 * 3 * 7 * 97$
67872	$2^5 * 3 * 7 * 101$
69216	$2^5 * 3 * 7 * 103$
71904	$2^5 * 3 * 7 * 107$
73248	$2^5 * 3 * 7 * 109$
75936	$2^5 * 3 * 7 * 113$
85344	$2^5 * 3 * 7 * 127$
88032	$2^5 * 3 * 7 * 131$
92064	$2^5 * 3 * 7 * 137$
93408	$2^5 * 3 * 7 * 139$
32928	$2^5 * 3 * 7^3$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$
43008	$2^{11} * 3 * 7$
15288	$2^3 * 3 * 7^2 * 13$
12720	$2^4 * 3 * 5 * 53$
96048	$2^4 * 3^2 * 23 * 29$
35904	$2^6 * 3 * 11 * 17$

$a = 2^5 * 3 * 7 * p, (p \neq 2, 3, 7)$ は通常解

第二ブロックには天与の解, 上半分は擬素数解; 下半分はエイリアン
エイリアンは正体が掴めない.

表 9: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-37$	
19	19
$D=-36$	
26	$2*13$
90	$2*3^2*5$
96	2^5*3
792	2^3*3^2*11
1020	$2^2*3*5*17$
5472	2^5*3^2*19
$D=-33$	
17	17
32	2^5
$D=-32$	
300	2^2*3*5^2
$D=-31$	
21	$3*7$

表 10: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-30$	
22	$2*11$
40	2^3*5
42	$2*3*7$
$D=-29$	
144	2^4*3^2
$D=-28$	
28	2^2*7
84	2^2*3*7
252	2^2*3^2*7
756	2^2*3^3*7
2268	2^2*3^4*7
6804	2^2*3^5*7
	(2^2*7*3^e)
$D=-25$	
13	13
$D=-24$	
168	2^3*3*7
2808	2^3*3^3*13

表 11: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-21$	
11	11
15	$3*5$
72	2^3*3^2
$D=-20$	
48	2^4*3
$D=-18$	
14	$2*7$
20	2^2*5
30	$2*3*5$
630	$2*3^2*5*7$
2310	$2*3*5*7*11$
$D=-17$	
16	2^4
36	2^2*3^2
$D=-16$	
336	2^4*3*7
$D=-15$	
18	$2*3^2$
$D=-14$	
9	3^2
$D=-13$	
7	7

表 12: 3 倍完全数, 宇宙定数項

a	素因数分解
$D=-12$	
10	$2*5$
24	2^3*3
60	2^2*3*5
$D=-9$	
5	5
8	2^3
$D=-8$	
12	2^2*3
$D=-6$	
6	$2*3$
$D=-5$	
3	3
4	2^2
$D=-3$	
2	2
$D=0$	
120	2^3*3*5
672	2^5*3*7

8 乗数 $h, P=2$ の完全数

$h>2$ を素数として $a=h2^e$ を考える.
$\sigma(a)=\sigma(h2^e)=(h+1)(2^{e+1}-1)$ なのでこれを h 倍する.

$$h\sigma(a)=(h+1)(2h2^e-h)=(h+1)(2a-h)=2(h+1)a-h(h+1).$$

書き直して

$$h\sigma(a)-2(h+1)a=-h(h+1).$$

ここで, $(h,0,2h+2)$ 完全数を考える.
D を定数項として $(h\sigma(a)-2(h+1)a=D$ が (A,B,C) 完全数の方程式.
$a=pk(p,k$ と互いに素な素数), とおくとき
$(h\sigma(kp)-2(h+1)kp=(h\sigma(k)-2(h+1)k)p+h\sigma(k)=D$ となる.
これより固有完全数 k の方程式は $h\sigma(k)-2(h+1)k=0$.
その解を k_0 として 宇宙定数項 $D_0=h\sigma(k_0)=2(k_0+1)$ となる.

9 (乗数 3 の完全数

$h=3$ なら $(3,0,8)$ 完全数 の方程式は定数項 D に対して

$$3\sigma(a)-8a=0=D.$$

固有完全数の方程式は

$$3\sigma(k)-8k=0.$$

表 13: (3,0,8) 固有完全数

k	素因数分解
84	2^2*3*7
1488	2^4*3*31
24384	$2^6*3*127$
270	$2*3^3*5$
1638	$2*3^2*7*13$

$k_0=84=2^2*3*7, 1488; a=2^4*3*31; a=24384=2^6*3*127$ は完全数の 3 倍であり予期通りの解.
$_0=270=2*3^3*5; a=1638=2*3^2*7*13$ は予期せぬ解である.

命題 1 *(3,0,8)完全数 の 固有完全数kが $k=3*2^eq(q\geq 5:)$ 素数, とすると, $q=2^{e+1}-1$: 素数, 2^eq は元祖完全数.*

Proof.

$$\begin{aligned}0 = 3\sigma(k) - 8k &= 3\sigma(3 * 2^e q) - 8 * 3 * 2^e q = 0\\ &= 3 * 4 * (2^{e+1} - 1)(q+1) - 8 * 3 * 2^e q\\ &= 3(4 * (2^{e+1} - 1)(q+1) - 8 * 2^e q)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 * (2^{e+1} - 1)(q+1) - 8 * 2^e q &= (8 * 2^e - 4)(q+1) - 8 * 2^e q\\ &= (8 * 2^e - 4)q + 8 * 2^e - 4 - 8 * 2^e q\\ &= 4(-q + 2^{e+1} - 1)\end{aligned}$$

よって, $-q + 2^{e+1} - 1; q = 2^{e+1} - 1$. q はメルセンヌ素数で, $\beta = 2^e q$ は元祖完全数.$a = 3\beta = 3 * 2^e q$

End

注意 1 *(3,0,8)* 完全数 の 固有完全数 k が $k = 3^2 * \alpha, (3 \not| \alpha)$ 素数, とする,
いくつかの仮定のもとで $k = 2 * 3^2 * 7 * 13$.

$$0 = 3\sigma(k) - 8k = 3\sigma(3^2 * \alpha) - 8 * 3^2 * \alpha = 3 * 13 * \sigma(\alpha) - 8 * 3^2 * \alpha$$

$13 * \sigma(\alpha) = 8 * 3 * \alpha$ により, α は 13 の倍数. $\alpha = 13\beta$ と書ける.$13 \not| \beta$ を仮定する.
$13 * \sigma(\alpha) = 13 * 14 * \sigma(\beta), 8 * 3 * \alpha = 8 * 3 * 13 * \beta$ により
$14 * \sigma(\beta) = 8 * 3 * \beta$. これから $7 * \sigma(\beta) = 8 * \beta$.
次の補題によって, $\beta = 7$. したがって, $k = 3^2 * \alpha = 3^2 * 13 * 7$.

補題 1 p は素数で, $p\sigma(\alpha) = (p+1)\alpha$ を満たすとすとき $\alpha = p$

Proof.
α は p の倍数なので, $\alpha = p^e A (p \not| A)$ と書ける.

$$p(p-1)\sigma(\alpha) = p(p^{e+1} - 1)\sigma(A) = (p^2 - 1)p^e A.$$

これより

$$(p^{e+1} - 1)\sigma(A) = (p^2 - 1)p^{e-1} A.$$

$A = 1$ とする.
$(p^{e+1} - 1) = (p^2 - 1)p^{e-1}$ により $p^{e-1} = 1; e = 1, p = a$.
$A > 1$ とする. $\sigma(A) > A$ によって,

$$(p^{e+1}-1)A < (p^{e+1}-1)\sigma(A) = (p^2-1)p^{e-1}A.$$

$p^{e+1}A$ を両辺から引いて,

$$-A < -p^{e-1}A$$

. これは矛盾.

End

$$p(p^{e+1}-1)linep\sigma(a) = (p+1)\alpha.$$

10 宇宙完全数

固有完全数 h_0 とおくとき, 宇宙定数項 D_0 は $k\sigma(h_0) = 2(k+1)h_0$.
$h_0 = 84 = 3 * 28$, $D_0 = 8 \times 84 = 672 = 2^5 * 3 * 7$.

表 14: 乗数 3 の (3,0,8) 完全数 $D_0 = 8 \times 84 = 672$, 宇宙完全数

a	素因数分解
420	$2^2 * 3 * 5 * 7$
756	$2^2 * 3^3 * 7$
924	$2^2 * 3 * 7 * 11$
1092	$2^2 * 3 * 7 * 13$
1428	$2^2 * 3 * 7 * 17$
1596	$2^2 * 3 * 7 * 19$
1932	$2^2 * 3 * 7 * 23$
2436	$2^2 * 3 * 7 * 29$
2604	$2^2 * 3 * 7 * 31$
3108	$2^2 * 3 * 7 * 37$
3444	$2^2 * 3 * 7 * 41$
3612	$2^2 * 3 * 7 * 43$
3948	$2^2 * 3 * 7 * 47$
4452	$2^2 * 3 * 7 * 53$
4956	$2^2 * 3 * 7 * 59$
5124	$2^2 * 3 * 7 * 61$
5628	$2^2 * 3 * 7 * 67$
5964	$2^2 * 3 * 7 * 71$
672	$2^5 * 3 * 7$
4116	$2^2 * 3 * 7^3$
13632	$2^6 * 3 * 71$
27816	$2^3 * 3 * 19 * 61$
43656	$2^3 * 3 * 17 * 107$
76416	$2^7 * 3 * 199$
224976	$2^4 * 3 * 43 * 109$

$D = -12$ の場合は解に特色がある.
$a = 2^e * 3$ は $3\sigma(a) - 8a$ の解.
$a = 2^e * 3$ を代入すると $3\sigma(a) - 8a = 3 * 4 * (2^{e+1} - 1) - 8 * 2^e * 3 =^1 2$.
この他に $a = 3, 6, 684$ が解である. さらに解があるだろうか.

表 15: 乗数 3 の (3,0,8) 完全数, 固有完全数 $k_0 = 2 * 3^3 * 5$ に関しての宇宙完全数

a	素因数分解
$k_0 = 2 * 27 * 5$	
1890	$2 * 3^3 * 5 * 7$
2970	$2 * 3^3 * 5 * 11$
3510	$2 * 3^3 * 5 * 13$
4590	$2 * 3^3 * 5 * 17$
5130	$2 * 3^3 * 5 * 19$
6210	$2 * 3^3 * 5 * 23$
7830	$2 * 3^3 * 5 * 29$
8370	$2 * 3^3 * 5 * 31$
9990	$2 * 3^3 * 5 * 37$
11070	$2 * 3^3 * 5 * 41$
11610	$2 * 3^3 * 5 * 43$
12690	$2 * 3^3 * 5 * 47$
14310	$2 * 3^3 * 5 * 53$
15930	$2 * 3^3 * 5 * 59$
16470	$2 * 3^3 * 5 * 61$
1080	$2^3 * 3^3 * 5$
6750	$2 * 3^3 * 5^3$
50508	$2^2 * 3^2 * 23 * 61$

11 $(\overline{P}^2, -P^2, 0)$ 完全数

$a = P^e$ とおく. $\overline{P}\sigma(a) = aP - 1$ と $\varphi(a) = \overline{P}P^{e-1}$ が成り立つ.
ここから a を抜いて, $\sigma(a), \varphi(a)$ を使う (A,B,C) 完全数を作ろう.
$P^2\varphi(a) = \overline{P}P^{e+1} = \overline{P}aP$ が成り立つので,
$\overline{P}\sigma(a) = aP - 1$ に $\overline{P}$ を掛けてできた

$$\overline{P}^2\sigma(a) = a\overline{P}P - \overline{P}$$

$P^2\varphi(a) = \overline{P}aP$ を代入して

$$\overline{P}^2\sigma(a) = P^2\varphi(a) - \overline{P}.$$

定数項 D を用いて

$$\overline{P}^2\sigma(a) - P^2\varphi(a) = D.$$

$P = 2$ とすると, $\sigma(a) - 4\varphi(a) = D$. これは半完全数の式とほぼ同じ.

表 16: 乗数 3 (3,0,8) 完全数, 定数項 D

a	素因数分解
$D=-18$	
90	$2*3^2*5$
$D=-16$	
560	2^4*5*7
$D=-15$	
36	2^2*3^2
$D=-12$	
3	3
6	$2*3$
12	2^2*3
24	2^3*3
48	2^4*3
96	2^5*3
192	2^6*3
384	2^7*3
684	2^2*3^2*19
768	2^8*3
1536	2^9*3
3072	2^10*3
6144	2^11*3
12288	2^12*3
24576	2^13*3
49152	2^14*3
98304	2^15*3
$D=9$	
72	2^3*3^2
$D=18$	
612	2^2*3^2*17

$\sigma(a)-4\varphi(a)=-1$ の解として 2^e があるのは明らかだがこれに限るかどうかわからない. ここでまた, 概完全数の類似が出てきた.

$D=0$ の第 1 ブロックには完全数の半分が出ている.

$D=0$ の第 3 ブロックには $a=2^2*p*q$ の形をし t いる.

$a=2^2*p*q$ を $\sigma(a)-4\varphi(a)=0$ に代入すると, $\sigma(a)=7(B+\Delta+1), 4\varphi(a)=8(B-\Delta+1)$ なので

$$\sigma(a)-4\varphi(a)=15\Delta-1=0.$$

表 17: $(1, -4, 0)$ 完全数

a	素因数分解
$D = -1$	
2	2
4	2^2
8	2^3
16	2^4
32	2^5
64	2^6
128	2^7
256	2^8
512	2^9

表 18: (1,-4,0) 完全数

a	素因数分解
$D = 0$	
14	$2 * 7$
248	$2^3 * 31$
4064	$2^5 * 127$
418	$2 * 11 * 19$
3596	$2^2 * 29 * 31$
3956	$2^2 * 23 * 43$
5396	$2^2 * 19 * 71$
8636	$2^2 * 17 * 127$
105	$3 * 5 * 7$
1485	$3^3 * 5 * 11$
3135	$3 * 5 * 11 * 19$

$a = 3 * 2^e$ とおき, $\sigma(a) = \sigma(3 * 2^e) = 4 * (2^{e+1} - 1) = 8 * 2^e - 4$.
そこでオイラー関数を使う. $\varphi(a) = \varphi(3 * 2^e) = 2^e$.
$\sigma(a) = 8 * 2^e - 4 = \varphi(a) = -4$.
定数項 D に対して, 次の (A,B,C) 完全数を考える.

$$\sigma(a) - 8 * \varphi(a) = D$$

12 $(1, 0, 2)$ 完全数

13 $(1, 0, 2)$ 完全数

14 (1,1,2) 宇宙完全数

(1,1,2) 宇宙完全数について計算結果を見る.
固有完全数は素数 q.
i. $k_0 = q$ のとき $D_0 = \sigma(q) - \varphi(q) = 2$.
(1,1,2) 宇宙完全数の解は次の方程式の解.

$$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = 2$$

解は q と異なる素数 p について解は qp.
土屋によると,$\sigma(a) + 1\varphi(a) - 2a = 2$ の解は $a = q_1 q_2 : (q_1, q_2)$ は相異なる素数のみ.
したがって, この場合も天与の解がなことがわかり完全解決した.

15 (1,2,3) 宇宙完全数

表 19: e

e	$a_0 = 2E - 21$	$E = 2^e$	$a = E * a_0$
4	11	32	352
5	43	64	2752
6	107	128	13696
8	491	512	251392
10	2027	2048	4151296
12	8171	8192	66936832
13	16363	16384	268091392

これは今まで研究がなされた.

16 (2,3,5) 宇宙完全数

(2,3,5) 宇宙完全数について計算結果を見る.
この結果は固有完全数が 1,4,6 であることを意味する (しかし証明は無い)
i. $k_0 = 1$ のとき $D_0 = 2\sigma(k_0) - 3\varphi(k_0) = 5k_0 - 4\varphi(k_0) = 1$.

この解は, 素数 p または 3^e なのであろう.
$k_0 = 1$ なので $p = k_0 p$ が解なのは当然である.
しかし 3^e は思いがけない解なのでこれを天与の解 (gifted solution) という.

表 20: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 0, m = 0$

a	素因数分解	D_0
1	1	-1
4	2^2	8
6	$2 * 3$	18

表 21: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 1, m = -1$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -1$	
2	2
3	3
5	5
7	7
9	3^2
11	11
13	13
17	17
19	19
23	23
27	3^3
29	29
31	31
37	37
41	41
43	43
47	47
53	53
59	59
61	61

ii. $k_0 = 4$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 8$.
iii. $k_0 = 6$ のとき $D_0 = 5k_0 - \varphi(k_0) = 18$.

17 素数の積み上げ解

$m = 2$ のときの解は面白い.

表 22: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 8, m = -8$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -8$	
12	$2^2 * 3$
20	$2^2 * 5$
28	$2^2 * 7$
44	$2^2 * 11$
52	$2^2 * 13$
68	$2^2 * 17$
76	$2^2 * 19$
92	$2^2 * 23$
116	$2^2 * 29$
124	$2^2 * 31$
148	$2^2 * 37$
164	$2^2 * 41$
172	$2^2 * 43$
188	$2^2 * 47$
212	$2^2 * 53$
236	$2^2 * 59$

表 23: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 18, m = -18$

a	素因数分解
$m = -D_0 = -18$	
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$
246	$2 * 3 * 41$
258	$2 * 3 * 43$

表 24: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-2, m=2$

a	素因数分解
10	$2*5$
130	$2*5*13$
23530	$2*5*13*181$

このように素数の積が順次の解の場合には 素数の積み上げ解という. あたかも石垣に自然石を用いて作ったような面影があるから, この名前を選んだ.

$F(a)=2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a, F(a)=-2$ について $a'=ap$ とおくとき

$F(a')=(2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a)p+2\sigma(a)-3\varphi(a)=-2p+2\sigma(a)-3\varphi(a)$ となる.

$F(a')=2$ を仮定すると $-2=F(a')=-2p+2\sigma(a)-3\varphi(a)$ となる.

$$2p=2+2\sigma(a)-3\varphi(a)=5a+2-6\varphi(a)$$

18 固有完全数 1 の定理

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=A+B-C=0$

$k_0=1$ なので無数の素数 p について解となり $D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)=A-B$.

ここで素数 q がありそのべき $q^\eta, (\eta>1)$ が解であると仮定する.

$a=q^\eta, R_1=q^{\eta-1}$ とおき これらの $\sigma(a), \varphi(a)$ を計算する.

$a=q^\eta$ のとき

$\overline{q}\sigma(a)=q^2R_1-1, \varphi(a)=\overline{q}R_1, a=qR_1$ なので,$X=q^2R_1-1, Y=\overline{q}R_1$ とおくと,

$$Aq^2R_1-A+B\overline{q}Y-CqY=(A-B)\overline{q} \tag{1}$$

$B\overline{q}Y-CqY=Y(B\overline{q}-Cq)=\overline{q}R_1(B\overline{q}-Cq), C=A+B$ に注意し R_1 の 1 次式に直しその係数を Γ とおくと

$$\begin{aligned}
\Gamma &= Aq^2+\overline{q}(B\overline{q}-(A+B)q) \\
&= Aq^2+B\overline{q}^2-(A+B)q\overline{q}) \\
&= Aq^2+B(q^2-2q+1)-(A+B)(q^2-q) \\
&= B(-2q+1)+(A+B)q \\
&= Aq-\overline{q}B
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\Gamma=Aq-\overline{q}B.$$

これより式 (2) を変形して

$$R_1\Gamma = A + A\overline{q} \quad - B\overline{q} \tag{2}$$

ゆえに

$$R_1(Aq - \overline{q}B) = A + A\overline{q} \quad - B\overline{q} = Aq \quad - B\overline{q} \tag{3}$$

A でまとめて

$$A(R_1 - 1)q = \overline{q}B(R_1 - 1).$$

$R_1 = q^{\eta-1} - 1 > 0$ によってこれを除して
$Aq = B\overline{P}$ がでて

$$\frac{B}{A} = \frac{q}{\overline{P}}.$$

この左の項と右の項は既約分数なので $A = \overline{P}, B = q$. よって, $A = B - 1$.
End

$(A + B - C)p + A - B = A - B$ により $A + B - C = 0$. さらに $A = B - 1$ なので, $C = 2B - 1$.

命題 2 $A = B - 1$, $C = 2B - 1$ のとき, $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ ならば素数 p を解に持つ.

定理 2 $A = B - 1$, $C = 2B - 1$ のとき, $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ 素数べき $q^{\varepsilon}, (\varepsilon > 1)$ を解に持つのは
B が素数の時で $B = q$ になる.

$B = 5$ なら (4,5,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0 = 1$ のときの宇宙完全数は 素数 p と 5^{ε} が解であり, 後者を天与の解 (gifted solution) という.