デカルトの完全数 後編 デカルトのおへそ

飯高 茂

平成 32 年 2 月 19 日

図 1: デカルト , フランスの哲学者 1596–1650

1 (A,B,C) 完全数

与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という．とくに (A,B,C) 完全数をデカルトの完全数という. これはこれで面白いが 1 つの例に過ぎない．しかし一般性のある結果がないと数学の研究としては物足らない.

2 固有完全数 1 の定理

デカルトの完全数をベースに一般的な結果を探してみよう.

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k とは次の式を満たす k のことである.

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-C=0$$

固有完全数 k_0 が 1 のとき, 無数の素数 p についてある定数 D_0 があり, $A\sigma(p)+B\varphi(p)-Cp=A-B=D_0$ となる.

一方, $A\sigma(p)+B\varphi(p)-Cp=(A+B-C)p+A-B=D_0$ により

$$A+B-C=0, D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)=A-B=C-2B.$$

ここで素数 q があり, そのべき $q^{\eta},(\eta>1)$ が解であると仮定する.

$a=q^{\eta}, R_1=q^{\eta-1}$ とおき これらの $\sigma(a),\varphi(a)$ を計算する.

$\overline{q}\sigma(a)=q^2R_1-1, \varphi(a)=\overline{q}R_1, a=qR_1$ なので,$X=q^2R_1-1, Y=\overline{q}R_1$ とおくと,

$$AX+B\overline{q}Y-CqY=(A-B)\overline{q} \tag{1}$$

$A+B=C$ により

$$AX+B\overline{q}Y-(A+B)qY=(A-B)\overline{q} \tag{2}$$

A,B でまとめて

$$A(X-qY-\overline{q})+B(\overline{q}Y-qY+\overline{q})=0 \tag{3}$$

ここで A の係数を計算する:

$$\begin{aligned}X-qY-\overline{q}&=q^2R_1-1-q(\overline{q}R_1)-\overline{q}\\&=qR_1(q-\overline{q})-q\\&=q(R_1-1).\end{aligned}$$

B の係数 $\overline{q}Y-qY+\overline{q}$ を $Y=\overline{q}R_1$ を用いて計算する.

$$\begin{aligned}\overline{q}Y - qY + \overline{q} &= -Y + \overline{q} \\ &= -\overline{q}R_1 + \overline{q} \\ &= \overline{q}(1 - R_1)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$A(X - qY - \overline{q}) + B(\overline{q}Y - qY + \overline{q}) = Aq(R_1 - 1) + B\overline{q}(1 - R_1) = 0 \tag{4}$$

$1 - R_1 = 1 - q^{\eta-1} \neq 0$ ($\eta > 1$ なので) により

$$Aq = B\overline{q}.$$

よって, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{q-1}{q}$. 両辺は既約分数なので分母, 分子がともに等しく $A = q - 1, B = q$.
よって, $A = B - 1 = q - 1$.
$(A + B - C)p + A - B = A - B$ により $A + B - C = 0$. さらに $A = B - 1$ なので, $C = 2B - 1$.
以上により次の結果が得られた.

命題 1 $A = B - 1$, $C = 2B - 1$ のとき, $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ はすべての素数 p を解に持つ.

定理 1 $A = B - 1$, $C = 2B - 1$ のとき, $B = q$ になる.

定理 2 素数 q について $B = q$, $A = B - 1$, $C = 2B - 1$ とするとき, すべての自然数 ε について q^{ε} は $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解になる.

$A = B - 1$, $C = 2B - 1$ のとき $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解を一般のデカルト完全数という.
このとき B が基になるので, B を一般のデカルト完全数の臍 (へそ, navel) という. あるいは略してデカルト完全数のおへそとも言う.

2.1　$B=3$ のとき

$B=3$ なら (2,3,5) 完全数. これはデカルトの完全数であり, そのとき 固有完全数 $k_0=1$ に対応する宇宙完全数には すべての素数 p と 3^ε があり, 前者が通常解で, 後者が天与の解である. ただしこれは 100 万以下についての計算を行った結果であり, 別の解の存在を否定できない.

表 1: $(A,B,C)=(2,3,5), A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ の解, 素数を除く

a	素因数分解	a	素因数分解
$D=-1$		31	31
2	2	37	37
3	3	41	41
5	5	43	43
7	7	47	47
9	3^2	53	53
11	11	59	59
13	13	61	61
17	17	67	67
19	19	71	71
23	23	73	73
27	3^3	79	79
29	29	81	3^4

2.2　$B=5$ のとき

$B=5$ なら (4,5,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0=1$ に対応する宇宙完全数には 素数 p と 5^ε が解であることは確かなことであるが, 驚いたことに変な解がでてきた.

非素数解を探したら, 5^e 以外に $a=21=3*7$ がでた. 正直のところ, 我が目を疑った.

$3*7$ に注目し, 次に足してみたところ $3+7=10=2*5$. ここにデカルトのヘソ $B=5$ がでてきた.

2.3　$B\geq 7$ のとき

素数と B^e の解以外の解が出てくる事態に備えないといけない. $B=7,11,13,17,19,23$ と手を広げて素数と B^e の解以外に限って表示するプログラムを用いて解の探索を行った.

$33=3*11$ に注目し, 次に足してみる. $3+11=14=2*7$. ここにデカルトのヘソ $B=7$ がでる.

この他に $a=4917=3*11*149$ が解として名乗りをあげた. これを 3 素数の解という.

表 2: $(A, B, C) = (4, 5, 9), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数を除く

a	素因数分解
21	$3 * 7$
25	5^2
125	5^3
625	5^4
3125	5^5
15625	5^6
78125	5^7
390625	5^8
1953125	5^9

表 3: $(A, B, C) = (6, 7, 13), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数と 7^e を除く

a	素因数分解
33	$3 * 11$
4917	$3 * 11 * 149$

表 4: $(A, B, C) = (10, 11, 21), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数と 11^e を除く

a	素因数分解
57	$3 * 19$
85	$5 * 17$

$57 = 3 * 19$ に注目し, 次に足してみる. $3 + 19 = 22 = 2 * 11$. ここにデカルトのヘソ $B = 11$ がでる.

$85 = 5 * 17$ についても同じ. ここでは 3 素数の解はないのだろうか.

表 5: $(A, B, C) = (12, 13, 25), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数と 13^e を除く

a	素因数分解
69	$3 * 23$
133	$7 * 19$
19513	$13 * 19 * 79$

$69 = 3 * 23$ に注目し, 次に足してみる. $3 + 23 = 26 = 2 * 13$. ここにデカルトのヘソ $B = 13$ がでる.

このほかは読者に任せる.

私は 3 素数の解 $a = 19513 = 13 * 19 * 79$ の素因子にヘソ $B = 13$ が見えたことが可笑しかった.

表 6: $(A, B, C) = (18, 19, 37), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数と 19^e を除く

a	素因数分解
217	$7 * 31$
57133	$19 * 31 * 97$

3 素数の解 $a = 57133 = 19 * 31 * 97$ の素因子にヘソ $B = 19$ が見えた.

表 7: $(A, B, C) = (22, 23, 45), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数と 23^e を除く

a	素因数分解
129	$3 * 43$
205	$5 * 41$
493	$17 * 29$
86549	$23 * 53 * 71$
159413	$23 * 29 * 239$

3 素数の解が 2 個見つかりそこにもヘソ $B = 23$ が見えた.

3　$B = 61$ のとき

700 万以下について計算してみた.

表 8: $(A, B, C) = (60, 61, 121), A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ の解, 素数を除く

a	素因数分解	a	素因数分解
1417	$13 * 109$	1687321	$61 * 139 * 199$
1957	$19 * 103$	1816921	$79 * 109 * 211$
3397	$43 * 79$	1687321	$61 * 139 * 199$
3721	61^2	1816921	$79 * 109 * 211$
226981	61^3	2633401	$37 * 103 * 691$
376201	$7 * 223 * 241$	5361481	$31 * 97 * 1783$
478281	$3 * 131 * 1217$		

4　素数積の解

一般に $\sum_{(a)}$ を a のすべての約数 d の和 , $\sum_{(a)}^{*} d$ を $1, a$ 以外の a の約数 d の和を示す記号とする.

すると, $\sigma(a) = a + 1 + \sum_{(a)}^{*} d$.

$\sigma(a)$ の代わりに, $\varphi(a)$ を用いた類似の公式が成り立つ (土屋の公式).

$\varphi(a) = a - 1 - \sum_{(a)}^{*} \varphi(d)$.

(A,B,C) 完全数の定義式に代入してみよう.

$$\begin{aligned} A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca &= A(a + 1 + \sum_{(a)}^{*} d) + B(a - 1 - \sum_{(a)}^{*} \varphi(d)) - Ca \\ &= (A + B - C)a + A - B + A(\sum_{(a)}^{*} d) - B(\sum_{(a)}^{*} \varphi(d)) \\ &= (A + B - C)a + A - B + \sum_{(a)}^{*} (Ad - B\varphi(d)) \end{aligned}$$

一般のデカルト完全数の仮定によると $A + B = C, A = B - 1$ なので,

$$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1 + \sum_{(a)}^{*} ((B - 1)d - B\varphi(d))$$

$A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ を仮定すると, $\sum_{(a)}^{*} ((B - 1)d - B\varphi(d)) = 0$.

ここで,B は素数で $(B - 1)a - B\varphi(a) = 0$ を仮定すると $a = B^e, e > 0$ とある自然数 e で書ける.

4.1　$a = pq$ となる解

$a = pq, (p < q)$ (相異なる素数の積) とおくとき, 右辺は

$$-1 + \sum_{(a)}^{*} ((B - 1)d - B\varphi(d)) = -1 + (B - 1)(p + q) - B(p + q - 2) = -1 + 2B - (p + q).$$

そこで, $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = -1$ を仮定すると $2B - (p + q) = 0$. すなわち, $p + q = 2B$.

偶数 $2B$ を相異なる素数 p, q の和 $p + q$ で表すことになり, ゴールドバッハの予想と関係する.

$B = 5$ なら $p + q = 2B = 10$. $(p, q) = (3, 7)$

$B = 7$ なら $p + q = 2B = 14$. $(p, q) = (3, 11)$

$B = 11$ なら $p + q = 2B = 22$. $(p, q) = (3, 19), (5, 17)$

$B = 13$ なら $p + q = 2B = 26$. $(p, q) = (3, 23), (7, 19)$

ところで $B=3$ なら $p+q=2B=6$ になり, $p<q$ を満たす素数解はない. したがってこのような変な解はないことがわかる.

しかしもっと変な解があるかもしれない.

4.2 $a=pqr$ となる解

$p,q,r(p<q<r)$ は素数とする. $\Delta_1=p+q+r, \Delta_2=pq+pr+q$ とおく.

$a=pqr$ についての約数は $1,a$ の他 p,q,r,pq,pr,qr なので, $d=p$ のとき $(B-1)d-B\varphi(d)=B-p$ によれば $d=q,r$ に関しての和も合わせると,$3B-\Delta_1$.

$d=pq$ のとき $(B-1)d-B\varphi(d)=(B-1)pq-B(pq-(p+q)+1)=-pq+B(p+q-1)$ によれば $d=qr,pr$ に関しての和も合わせると,

$-pq+B(p+q-1)-qr+B(q+r-1)-pr+B(p+r-1)=-\Delta_2-3B+2B\Delta_1$.

これらによって, $a=pqr$ のとき,

$$\sum_{(a)}^{*}((B-1)d-B\varphi(d))=(2B-1)\Delta_1-\Delta_2.$$

例として, $B=7$ のとき $a=4917=3*11*149$ について, 電卓で計算すると $\Delta_1=163, \Delta_2=2119$.

これより, $(2B-1)\Delta_1-\Delta_2=13*163-2119=0$.

これは簡単な問題である. しかし本当は, $B=7$ を仮定し素数 $p,q,r(p<q<r)$ について, $a=pqr$ とおくとき, $13*\Delta_1=\Delta_2$ とすると, $a=4917=3*11*149$ を証明したい.

与えられた $B>3$ について $2B=p+q$ となる 2 素数が存在するかを問うのが ゴールドバッハの問題.

与えられた素数 $B>5$ について $2B=p+q$ となる 2 素数が存在するかを問うのが ゴールドバッハの問題なら $(2B-1)*\Delta_1=\Delta_2$ となる 3 素数 $(p,q,r(p<q<r))$ が存在するかを問うのが 3 素数ゴールドバッハの問題である.

次のような問題を出してもよい.

$B=5$ のとき $(2B-1)*\Delta_1=\Delta_2$ となる 3 素数 (p,q,r) がないことを計算で示せ.