数学の研究をはじめよう
デカルトの完全数 前編 (2,3,5) 完全数

飯高 茂

平成 32 年 2 月 7 日

1 デカルト

定年で大学を辞めたとき, ただちに放送大学の学生として登録した. 入学金 9000 円 (継続なら 6500 円) 納めると 1 年間有効の専科学生になることができ, その結果国内各所にある放送大学学習センターが使える.

実際, 学習センターの学生控室でこの原稿を書いている. センターには放送大学で過去に使われたビデオ, DVD が大量に保管されていてこれらも自由に使える. 放送大学のラジオ放送による講義でデカルトの哲学きいたところ意外に面白かった.

デカルトは数学として倍積完全数の研究も行った. たとえば $a = 30240$ は $\sigma(a) = 4a$ を満たすことを示して 4 倍積完全数の発見者となった.

哲学者として 「$2 + 3 = 5$ が正しいことは誰でも知っていて, 疑う余地が無い. このように誰もが疑う余地が無い命題を見出したい」と述べているそうだ.

ここでは (2,3,5) 完全数をデカルトの完全数と命名しこれを詳しく調べる.

2 (2,3,5) 完全数

(2,3,5) 完全数とは, 定数 D に対して,$2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = D$ を満たす自然数 a のことである.

$\sigma(a), \varphi(a)$(オイラー関数) はそれぞれ, 自然数 a の約数の和, 分母が a の既約な真分数 $\frac{b}{a}$ の個数を意味する.

より一般的には与えられた定数項 D と整数 (A, B, C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a) + B\varphi(a) - Ca = D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

定数 k と素数 p(p は k を割らない) について $a = kp$ が (A,B,C) 完全数になる p が無数にあるとする.

$$\begin{aligned}A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp\\ &= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p+A\sigma(k)-B\varphi(k)\\ &= D\end{aligned}$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので, k についての方程式ができる.

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, k_0 とおく. $D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 に対応した (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=k_0p$ と書ける解を 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ. これ以外の解をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すことこそ基本的課題である. 一般には大変難しい問題になる.

さて, 線形代数では, 正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

宇宙完全数の理論では, 固有完全数が固有値にあたり, 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する, と思うことができる.

3 (1,1,2) 宇宙完全数

(1,1,2) 宇宙完全数について計算結果を見てみよう.

$\sigma(k)+\varphi(k)-2k=0$ を満たす k が固有完全数であるがこれは 1 および素数 .

i. $k=1$ のとき 宇宙定数項 $D_0=\sigma(1)-\varphi(1)=0$. このときの (1,1,2) 宇宙完全数の解は 1 および素数 p.

ii. $k=q$(素数) のとき 宇宙定数項 $D_0=\sigma(q)-\varphi(q)=q+1-(q-1)=2$.

したがって (1,1,2) 宇宙完全数の方程式 $\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$.

定理 1 (土屋知人) $\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$ の解は $a=q_1q_2$ ここで q_1,q_2 は相異なる素数.

Proof .

(土屋のアイデアによる.)

一般に $\sum_{(a)} d$ を a のすべての約数 d の和 , $\sum_{(a)}^* d$ を $1,a$ 以外の a の約数 d の和を示す記号とする.

例えば, $\sum_{(a)}^* d=0$ なら a は 1 および 素数.

定義より $\sigma(a)=\sum_{(a)} d=1+a+\sum_{(a)}^* d$.

ガウスの公式は $a=\sum_{(a)}\varphi(d)=1+\varphi(a)+\sum_{(a)}^*\varphi(d)$ となる.

よって $\varphi(a) = a - 1 - \sum_{(a)}^{*} \varphi(d)$. これより，

$$\sigma(a) + \varphi(a) = 1 + a + \sum_{(a)}^{*} d + a - 1 - \sum_{(a)}^{*} \varphi(d) = 2a + \sum_{(a)}^{*} (d - \varphi(d)).$$

ここで $\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = 2$ を仮定すると $\sum_{(a)}^{*} (d - \varphi(d)) = 2$.

i. $a = p^e$ なら $1, a$ 以外の約数 は　$d = p^f, (0 < f < e)$. $d - \varphi(d)) = p^{f-1}$. これは $f = 1$ なら 1. $f > 1$ なら $1 + p$ 以上

ｉｉ．$a = pq, (p \neq q)$ なら $1, a$ 以外の約数 は　$q - \varphi(q) = 1, p - \varphi(p) = 1$ により．$\sigma(a) + \varphi(a) - 2a = 2$.

q.e.d.

(1,2,3) 宇宙完全数の場合はさらに興味深いがここでは省略.

4 (2,3,5) 完全数

次に (2,3,5) 宇宙完全数について計算結果を見る.

表 1: (2,3,5) 完全数,$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$

a	素因数分解
$D=-9$	
33	$3*11$
121	11^2
153	3^2*17
165	$3*5*11$
4653	$3^2*11*47$
7209	3^4*89
$D=-8$	
22	$2*11$
$D=-7$	
35	$5*7$
75	$3*5^2$
1089	3^2*11^2
3627	$3^2*13*31$

表 2: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$

a	素因数分解
$D=-5$	
21	$3*7$
49	7^2
117	3^2*13
837	3^3*31
1425	$3*5^2*19$
$D=-4$	
14	$2*7$
50	$2*5^2$
$D=-3$	
15	$3*5$
25	5^2
99	3^2*11
783	3^3*29
6723	3^4*83
$D=-2$	
10	$2*5$
130	$2*5*13$
$D=1$	
63	3^2*7
6399	3^4*79
$D=2$	
8	2^3
110	$2*5*11$
1550	$2*5^2*31$

4.1 解 3^eQ

ここで D が奇数のとき $3^eQ, (Q:$ 素数) の解が多いことに注目しよう.
一般に $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$ に解 $a=3^eQ$ があるとし, $R=3^e$ とおくとき
$2\sigma(a)=(3^{e+1}-1)(Q+1)=(3R+1)(Q+1), 3\varphi(a)=2R(Q-1), -5a=-5R$ なので

$$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-Q+R-1=D.$$

よって, $Q=R-1-D=3^e-1-D$. Q は奇素数とすると, D は奇数.
この場合の具体例をパソコンで計算してみよう.

表 3: $Q=3^e-1-D$

$D=-3$		
e	$a=3^e$	$Q=3^e+2$
1	3	5
2	9	11
3	27	29
4	81	83
8	6561	6563
10	59049	59051
$D=-5$		
e	$a=3^e$	$Q=3^e+4$
1	3	7
2	9	13
3	27	31
6	729	733
9	19683	19687
10	59049	59053

$q=2^e-1$ が素数のとき, これをメルセンヌ素数, $q=2^e+1$ が素数のとき, フェルマ素数, というがこれらは最も人気のある素数といえよう.

ここでは $Q=3^e+2, 3^e+4$ となる素数 Q がでてきた. フェルマ素数似ているのでそのうち人気が出るかもしれない. 先進的な高校生はこれらの素数の研究を始めてもいいと思う.

5 固有完全数

前の項で書かなかった $D=0$ の場合を次に記す．この解は固有完全数である．

$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=0$ となるのは $a=1,4,6$ がある．

これは 固有完全数 k_0 が 1,4,6 であることを意味する (しかしこれ以外の固有完全数が絶対無いとはまだ言えない).

6 $k_0=1$ のとき

i. $k_0=1$ のとき宇宙定数項 $D_0=2\sigma(k_0)-3\varphi(k_0)=5k_0-6\varphi(k_0)=-1$.

表 4: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D=-1$ の解

a	素因数分解	a	素因数分解
$D=-1$		31	31
2	2	37	37
3	3	41	41
5	5	43	43
7	7	47	47
9	3^2	53	53
11	11	59	59
13	13	61	61
17	17	67	67
19	19	71	71
23	23	73	73
27	3^3	79	79
29	29	81	3^4

この解は $a = p$: 素数, $a = 3^e$ (3 のべき) だけらしい.
$k_0 = 1$ なので $k_0 p = p$ が解なのは当然である.
しかし 3^e は思いがけない解なのでこれを天与の解 (gifted solution) という.

7　２番目の固有完全数 $k_0 = 4$

ii. $k_0 = 4$ のとき宇宙定数項 $D_0 = 5k_0 - 6\varphi(k_0) = 8$.

表 5: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 8$ の解

a	素因数分解
12	$2^2 * 3$
20	$2^2 * 5$
28	$2^2 * 7$
44	$2^2 * 11$
52	$2^2 * 13$
68	$2^2 * 17$
76	$2^2 * 19$
92	$2^2 * 23$

固有完全数 $k_0 = 4$ なので $a = 4p$ が通常解. このとき天与の解はないらしい.
$2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 8$ の解 が $4p$ であることを証明するのは困難なことに違いない.
解 が $4L(L:$ 奇数$)$ と書けると仮定して解いてみたい.
L は $7\sigma(L) + 3\varphi(L) - 10L = 4$ を満たす. パソコンで計算すると解は素数だけらしい.
すなわちこれは L が素数であることの条件式らしい.　次の定理ができた.

定理 2 $7\sigma(a) + 3\varphi(a) - 10a = 4$ を満たす a は素数に限る.

Proof

$$
\begin{aligned}
4 = 7\sigma(a) + 3\varphi(a) - 10a &= 7(1 + a + \sum_{(a)}^{*} d) + 3(a - 1 - \sum_{(a)}^{*} \varphi(d)) - 10a \\
&= 4 + 7\sum_{(a)}^{*} d - 3\sum_{(a)}^{*} \varphi(d)) \\
&= 4 + \sum_{(a)}^{*} (7d - 3\varphi(d)) \\
&\geq 4
\end{aligned}
$$

ゆえに $\sum_{(a)}^{*}(7d - 3\varphi(d)) = 0$ なので $1, a$ 以外の約数はないので, a は素数.

8　3番目の固有完全数 $k_0 = 6$

iii. $k_0 = 6$ のとき 宇宙定数項 $D_0 = 5k_0 - 6\varphi(k_0) = 18$.
$2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 18$ の解をパソコンで求めると
$30 = 2*3*5$, $42 = 2*3*7$,
$66 = 2*3*11$, $78 = 2*3*13$ などになる.

9　素数の積み上げ解

$D = -2$ のときの解は面白い.

表 6: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = -2$ の解

a	素因数分解
10	$2*5$
130	$2*5*13$
23530	$2*5*13*181$

このように素数の積が順次, 解を与えている場合, これらを素数の積み上げ解という. この数表にはあたかも自然石を用いて石垣を作ったような面影がある.

$2\varphi(a) = a + 1$ の解は　フェルマ素数 $3, 5, 17, 257, \cdots$ 積み上げ解になる.
$F(a) = 2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a, F(a) = -2$ について $a' = ap$ とおくとき
$F(a') = (2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a)p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a) = -2p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a)$ となる.
$F(a') = 2$ を仮定すると $-2 = F(a') = -2p + 2\sigma(a) - 3\varphi(a)$ となる.

$$2p = 2 + 2\sigma(a) - 3\varphi(a) = 5a + 2 - 6\varphi(a)$$

$F(a) = 2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a, G(a) = 5a - 6\varphi(a)$ について次のような計算をしてみた.

a	$F(a)$	$G(a)$	素因数分解
10	-2	26	$2*13$
130	-2	362	$2*181$
23530	-2	65810	$2*5*6581$

$G(23530) = 2*5*6581$ は $2p$ にならないので石垣は 3 段で終わり. すこし残念だが, フェルマ素数 $3, 5, 17, 257, \cdots$ のような素数列 $2, 5, 13, 181$ が発見できたと思って自らを慰めた.