数学の研究をはじめよう
デカルトの完全数

飯高 茂

平成 32 年 1 月 13 日

1 デカルト

定年で大学を辞めたとき, ただちに放送大学の学生として登録した. 入学金を 9500 円 (継続なら 6500 円) 納めると 1 年間有効の専科学生になり, その結果国内各所にある放送大学学習センターが使える.

今現在, 東京多摩放送大学学習センターの学生控室でパソコンを利用してこの原稿を書いている. 学習センターには放送大学で過去の授業で使われたビデオ, DVD が大量に保管されている. これらも自由に使えてなかなか便利である.

たとえばラジオ放送による放送大学の講義できいたデカルト哲学が面白かった.

デカルトは数学では倍積完全数の研究も行ったが哲学者として 「$2+3=5$ が正しいことは誰でも知っていて, 疑う余地が無いと思っている. このように誰もが疑う余地が無い命題を見出したい」というようなことを述べている.

ここでは (2,3,5) 完全数をデカルトの完全数と命名しこれを詳しく調べることにした.

2 (2,3,5) 完全数

(2,3,5) 完全数とは, 定数 D に対して,$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$ を満たす自然数 a のことである.

$\sigma(a), \varphi(a)$(オイラー関数) はそれぞれ, 自然数 a の約数の和, 分母が a の既約な真分数 $\frac{b}{a}$ の個数を意味する.

より一般的には与えられた定数項 D と整数 (A,B,C)(最大公約数は 1 とする) に対して $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D$ の解 a を (A,B,C) 完全数という.

定数 k と素数 $p(p \nmid k)$ について $a=kp$ が (A,B,C) 完全数になる p が無数にあるとする.

$$
\begin{aligned}
A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca &= A\sigma(k)(p+1)+B\varphi(k)(p-1)-Ckp \\
&= (A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck)p+A\sigma(k)-B\varphi(k) \\
&= D
\end{aligned}
$$

となるが, 解となる素数 p が無数にあると仮定したので, 次が成り立つ.

$$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0, A\sigma(k)-B\varphi(k)=D.$$

$A\sigma(k)+B\varphi(k)-Ck=0$ を満たす k を (A,B,C) 完全数の固有完全数といい, これを k_0 とおく. $D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)$ と書いて, D_0 を宇宙定数項という.

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=0$ により, $D_0=Ck_0-2B\varphi(k_0)$.

$A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=D_0$ の解 a を固有完全数 k_0 に対応した (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ.

$a=kp$ と書ける解を 通常型 (A,B,C) 宇宙完全数とよぶ. これ以外の解をエイリアン解, 天与の解などと呼ぶ. これらを全てを探し出すこと, これこそ基本的課題である.

一般には大変難しい問題になる.

さて, 線形代数では, 正方行列 M に対してその固有値と固有ベクトルを求めることは基本的課題である.

宇宙完全数では, 固有完全数が固有値にあたり, 宇宙完全数が固有ベクトルに対応する.

3 (1,1,2) 宇宙完全数

(1,1,2) 宇宙完全数について計算結果を見てみよう.

$\sigma(k)+\varphi(k)-2k=0$ を満たす k が固有完全数であるがこれは 1 および素数 .

i. $k=1$ のとき 宇宙定数項 $D_0=\sigma(1)-\varphi(1)=0$. このときの (1,1,2) 宇宙完全数の解は 1 , 素数 p.

ii. $k=q$(素数) のとき 宇宙定数項 $D_0=\sigma(q)-\varphi(q)=q+1-(q-1)=2$.

(1,1,2) 宇宙完全数の解は次の方程式の解.

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$$

解は q と異なる素数 p の積 qp.

土屋知人氏によると,$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=2$ の解は $a=q_1q_2(q_1,q_2)$ は相異なる素数のみ. したがって, 天与の解がないことがわかり基本的課題は完全に解決した.

(1,2,3) 宇宙完全数の場合はさらに興味深いがここでは省略.

4 (2,3,5) 完全数

とりあえず (2,3,5) 宇宙完全数について計算結果を見る.

表 1: (2,3,5) 完全数,$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$

a	素因数分解　D_0
$D=-9$	
33	$3*11$
121	11^2
153	3^2*17
165	$3*5*11$
4653	$3^2*11*47$
7209	3^4*89
$D=-8$	
22	$2*11$
$D=-7$	
35	$5*7$
75	$3*5^2$
1089	3^2*11^2
3627	$3^2*13*31$

表 2: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$

a	素因数分解
$D=-5$	
21	$3*7$
49	7^2
117	3^2*13
837	3^3*31
1425	$3*5^2*19$
$D=-4$	
14	$2*7$
50	$2*5^2$
$D=-3$	
15	$3*5$
25	5^2
99	3^2*11
783	3^3*29
6723	3^4*83
$D=-2$	
10	$2*5$
130	$2*5*13$
$D=1$	
63	3^2*7
6399	3^4*79
$D=2$	
8	2^3
110	$2*5*11$
1550	$2*5^2*31$

4.1 解 3^eQ

ここで $D=-3$ のとき 解 $3^eQ, (Q:$ 素数$)$ が多いことに注目する.

一般に $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D$ に解 $a=3^eQ$ があるとしよう. $R=3^e$ とおくとき

$2\sigma(a)=(3^{e+1}-1)(Q+1)=(3R+1)(Q+1), 3\varphi(a)=2R(Q-1), -5a=-5R$ なので

$$2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=-Q+R-1=D.$$

よって, $Q=R-1-D=3^e-1-D$. Q は奇素数とすると, D は奇数.

この場合の具体例をパソコンで計算してみよう.

表 3: $Q=3^e-1-D$

$D=-3$		
e	$a=3^e$	$Q=a-1-D=3^e+2$
1	3	5
2	9	11
3	27	29
4	81	83
8	6561	6563
10	59049	59051
$D=-5$		
e	$a=3^e$	$Q=a-1-D=3^e+4$
1	3	7
2	9	13
3	27	31
6	729	733
9	19683	19687
10	59049	59053

$q=2^e-1$ が素数のとき, これをメルセンヌ素数, $q=2^e+1$ が素数のとき, これをフェルマ素数, という.

$Q=3^e+4$ が素数の場合はこれらと似ている. その点にも意義がある.

表 4: $Q = 3^e - 1 - D$

$D=-9$		
e	$a=3^e$	$Q=a-1-D=3^e+8$
1	3	11
2	9	17
4	81	89
5	243	251
8	6561	6569

5 固有完全数

前の項で書かなかった $D=0$ の場合を次に記す. これは固有完全数である.

表 5: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=0$

a	素因数分解
$D=0$	
1	1
4	2^2
6	$2*3$

これは 固有完全数 k_0 が 1,4,6 であることを意味する (しかしこれ以外の固有完全数が無いとは言えない).

6 $k_0=1, D_0=-1$ のとき

i. $k_0=1$ のとき宇宙定数項 $D_0=2\sigma(k_0)-3\varphi(k_0)=5k_0-6\varphi(k_0)=-1$.
この解は $a=p$: 素数, $a=3^e$ (3 のべき) だけらしい.
$k_0=1$ なので $k_0p=p$ が解なのは当然である.
しかし 3^e は思いがけない解なのでこれを天与の解 (gifted solution) という.

表 6: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=D=-1$ の解

a	素因数分解	a	素因数分解
$D=-1$		31	31
2	2	37	37
3	3	41	41
5	5	43	43
7	7	47	47
9	3^2	53	53
11	11	59	59
13	13	61	61
17	17	67	67
19	19	71	71
23	23	73	73
27	3^3	79	79
29	29	81	3^4

7 2番目の固有完全数 $k_0=4$

ii. $k_0=4$ のとき宇宙定数項 $D_0=5k_0-6\varphi(k_0)=8$.

表 7: $2\sigma(a)+3\varphi(a)-5a=8$ の解

a	素因数分解
12	2^2*3
20	2^2*5
28	2^2*7
44	2^2*11
52	2^2*13
68	2^2*17
76	2^2*19
92	2^2*23

固有完全数 $k_0=4$ なので $a=4p$ が通常解. このとき天与の解はないらしい.

8　3番目の固有完全数 $k_0 = 6$

iii. $k_0 = 6$ のとき 宇宙定数項 $D_0 = 5k_0 - 6\varphi(k_0) = 18$.

表 8: $2\sigma(a) + 3\varphi(a) - 5a = 18$ の解

a	素因数分解
30	$2 * 3 * 5$
42	$2 * 3 * 7$
66	$2 * 3 * 11$
78	$2 * 3 * 13$
102	$2 * 3 * 17$
114	$2 * 3 * 19$
138	$2 * 3 * 23$
174	$2 * 3 * 29$
186	$2 * 3 * 31$
222	$2 * 3 * 37$
246	$2 * 3 * 41$
258	$2 * 3 * 43$

9 固有完全数 1 の定理

デカルトの完全数は面白いが 1 つの例に過ぎない. しかし一般性のある結果がないと数学の研究としては物足らない.

デカルトの完全数をベースに一般的な結果を探してみよう.

(A,B,C) 完全数の固有完全数 k_0 が 1 のときを考える.

$A\sigma(k_0)+B\varphi(k_0)-Ck_0=A+B-C=0$

$k_0=1$ なので無数の素数 p について解となり $D_0=A\sigma(k_0)-B\varphi(k_0)=A-B=C-2B$.

ここで素数 q がありそのべき $q^\eta,(\eta>1)$ が解であると仮定する.

$a=q^\eta, R_1=q^{\eta-1}$ とおき これらの $\sigma(a),\varphi(a)$ を計算する.

$\overline{q}\sigma(a)=q^2R_1-1,\varphi(a)=\overline{q}R_1, a=qR_1$ なので,$X=q^2R_1-1, Y=\overline{q}R_1$ とおくと,

$$AX+B\overline{q}Y-CqY=(A-B)\overline{q} \tag{1}$$

$$AX+B\overline{q}Y-(A+B)qY=(A-B)\overline{q} \tag{2}$$

$$A(X-qY-\overline{q})+B(\overline{q}Y-qY+\overline{q})=0 \tag{3}$$

ここで A の係数を計算する:

$$\begin{aligned}X-qY-\overline{q}&=q^2R_1-1-q(\overline{q}R_1)-\overline{q}\\&=qR_1(q-\overline{q})-q\\&=q(R_1-1).\end{aligned}$$

B の係数を $Y=\overline{q}R_1$ を用いて計算する.

$$\begin{aligned}\overline{q}Y-qY+\overline{q}&=-Y+\overline{q}=-Y+\overline{q}\\&=-\overline{q}R_1+\overline{q}\\&=\overline{q}(1-R_1)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$A(X-qY-\overline{q})+B(\overline{q}Y-qY+\overline{q})=Aq(R_1-1)+B\overline{q}(1-R_1)=0 \tag{4}$$

$1-R_1=1-q^{\eta-1}\neq 0$ ($\eta>1$ なので) により

$$Aq=B\overline{q}.$$

よって, $\dfrac{A}{B}=\dfrac{q-1}{q}$. 両辺は既約分数なので $A=q-1, B=q$. よって, $A=B-1=q-1$.

$(A+B-C)p+A-B=A-B$ により $A+B-C=0$. さらに $A=B-1$ 　なので, $C=2B-1$.

以上により次の結果が得られた.

命題 1 $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ は素数 p を解に持つ.

定理 1 $A=B-1$, $C=2B-1$ のとき, $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ が ある自然数 η と素数 q について q^{η} 　を解に持つと仮定すると $B=q$ になる.

定理 2 素数 q について $B=q$, $A=B-1$, $C=2B-1$ とするとき, すべての自然数 ε について q^{ε} 　は $A\sigma(a)+B\varphi(a)-Ca=-1$ の解になる.

$B=5$ なら (4,5,9) 完全数でそのとき 固有完全数 $k_0=1$ のときの宇宙完全数は 素数 p と 5^{ε} が解であり, 後者が天与の解.